Семинар 5.

Геометрия и алгебра, весенний семестр 2018 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите собственные значения, собственные и корневые подпространства оператора, заданного матрицей

(а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; (в) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; (г) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найдите минимальные многочлены всех операторов из предыдущей задачи.

Задача 3. Пусть A — квадратная матрица с коэффициентами в некотором поле $\mathbb{F}$, а $m_A(t) \in \mathbb{F}[t]$ — минимальный многочлен этой матрицы. Докажите, что если $f(A) = 0$ для некоторого многочлена $f \in \mathbb{F}[t]$, то f делится на m.

Задача 4. Может ли характеристический многочлен линейного оператора иметь корень, не совпадающий ни с одним из корней минимального многочлена этого оператора?

Задача 5. Докажите, что два коммутирующих линейных оператора на конечномерном комплексном векторном пространстве имеют общий собственный вектор.

Задача 6. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где

(а) $\chi = t^6 - 1$, $\mu = t^3 - 1$;

(б) $\chi = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu = (t-1)(t-2)$;

(в) $\chi = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu = (t-1)^2(t-2)^3$?

В тех случаях, где ответ положительный, определите также, какой вид может иметь жорданова нормальная форма такой матрицы.

Задача 7. Пусть $V^{(\lambda)}$ и $V^{(\mu)}$ — корневые подпространства одного и того же оператора. Докажите, что если $\lambda \neq \mu$, то $V^{(\lambda)} \cap V^{(\mu)} = \{0\}$.

Задача 8. Пусть оператор A на $\mathbb{C}^n$ удовлетворяет уравнению $A^n = I$.

(а) Докажите, что все собственные числа оператора A являются степенями числа $\eta = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} i$.

(б) Докажите, что если все собственные числа оператора A равны η^k для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $A = \eta^k I$ (то есть, A — скалярный оператор).

Задача 9 (Фробениусова нормальная форма)**.** Докажите, что каждый линейный оператор на конечномерном пространстве над произвольным полем в некотором базисе может быть записан блочно-диагональной матрицей с квадратными блоками вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 3. Срок сдачи 6 февраля.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите все собственные и корневые подпространства оператора на $\mathbb{R}^3$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Характеристический многочлен некоторого оператора равен $(t-1)^2(t-2)^2$, а минимальный равен $(t-1)^2(t-2)$. Какой вид может иметь жорданова нормальная форма этого оператора?

Задача 3. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(ax + 1).$$

Найдите все собственные и корневые подпространства оператора T_a для каждого $a \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Рассмотрим $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Определим оператор $M_a : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ умножения на $a \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ формулой:

$$M_a : x \mapsto ax.$$

Найдите характеристический многочлен оператора M_a для $a = 1 + \sqrt[3]{2}$.

Задача 5. Минимальный многочлен $m_T(t)$ оператора T равен $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$. Докажите, что корневое подпространство $V^{(\lambda_1)}$ оператора T совпадает с образом оператора $T - \lambda_2 I$.