Алгебра и геометрия, весенний семестр 2018 г.

Листок 1.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите все такие 2×2 матрицы X с вещественными коэффициентами, что

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найдите явную формулу, выражающую коэффициенты характеристического многочлена матрицы $n \times n$ через коэффициенты самой матрицы.

Задача 3. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ — многочлен, а A — вещественная 2×2-матрица с собственными значениями λ_1 и λ_2.

(а) Докажите, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$f(A) = f(\lambda_1)\frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2)\frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(б) Придумайте аналогичную формулу для случая $\lambda_1 = \lambda_2$.

Задача 4. Некоторый оператор T на векторном пространстве V удовлетворяет уравнению $T^2 = I$, где I — тождественный оператор.

(а) Чему могут быть равны собственные значения оператора T?

(б) Докажите, что V раскладывается в прямую сумму собственных подпространств V^1 и V^{-1} оператора T.

Задача 5. Докажите, что у любого набора (возможно, бесконечного) попарно коммутирующих линейных операторов на конечномерном комплексном векторном пространстве есть общий собственный вектор.

Задача 6. Докажите тождество

$$e^{\mathrm{tr}(T)} = \det(e^T)$$

для всех линейных операторов на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

Задача 7. (а) Пусть p — простое число, а A — целочисленная $n \times n$-матрица такая, что

$$A^p = I,$$

где I — единичная матрица, но при этом $A \neq I$. Докажите, что $n \geq p - 1$.

(б) Приведите пример такой матрицы для $n = p - 1$.

Задача 8 (Резольвента Лагранжа)**.** Пусть оператор T на векторном пространстве V (возможно бесконечномерном) удовлетворяет уравнению

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_n I) = 0.$$

Обозначим через $f_1(x)$,…, $f_n(x)$ многочлены степени $(n-1)$, такие что $f_i(\lambda_j) = 0$ при $i \neq j$, а $f_i(\lambda_i) = 1$ (то есть те самые многочлены, которые используются в интерполяционной формуле Лагранжа). Оператор $T_i := f_i(T)$ назвается *i-той резольвентой Лагранжа* оператора T. Докажите, что для любого вектора $v \in V$ выполняется тождество

$$v = T_1(v) + \ldots + T_n(v),$$

причём либо $T_i(v) = 0$, либо $T_i(v)$ — собственный вектор оператора T с собственным значением λ_i.