Семинар 6.

Геометрия и алгебра, весенний семестр 2018 г., факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите жорданову нормальную форму матрицы (над полем комплексных чисел)

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -6 & 9 \\ 3 & 3 & -7 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \ \text{(в)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Докажите, что степень минимального многочлена нескалярной квадратной матрицы ранга один равна двум.

Задача 3. (а) Нильпотентный оператор $N : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ удовлетворяет условиям:

$$\dim \operatorname{Ker}(N) = 3; \quad \dim \operatorname{Ker}(N^2) = 4.$$

Найдите его жорданову нормальную форму.

(б) Существует ли нильпотентный оператор $N : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, удовлетворяющий условиям:

$$\dim \operatorname{Ker}(N) = 2; \quad \dim \operatorname{Ker}(N^2) = 3; \quad \dim \operatorname{Ker}(N^3) = 5?$$

Задача 4. Пусть V — векторное пространство (возможно бесконечномерное) над полем $\mathbb{F}$, а $T : V \to V$ — линейный оператор. Известно, что минимальный многочлен оператора T является произведением двух взаимно простых многочленов f, $g \in \mathbb{F}[t]$. Докажите, что V раскладывается в прямую сумму двух T-инвариантных подпространств U и W таких, что мининимальные многочлены операторов $T|_U$ и $T|_W$ совпадают с f и g.

Задача 5. Пусть A — оператор на конечномерном комплексном векторном пространстве. Определим *экспоненту* e^A как оператор, равный сумме ряда

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots .$$

(а) Проверьте, что для всех диагонализуемых операторов ряд e^A сходится.

(б) Докажите, что для диагонализуемого оператора с двумя различными собственными значениями a и b выполнена формула

$$e^A = \frac{ae^b - be^a}{a - b} I + \frac{e^a - e^b}{a - b} A.$$

(в) Докажите, что если $A = \lambda I + N$, где N — нильпотентный оператор, то $e^A = e^\lambda e^N$.

(г) Выведите из пунктов (а) и (в), что ряд, определяющий e^A, сходится для всех операторов A. (Подсказка: воспользуйтесь жордановой нормальной формой.)

(д) Докажите, что если $AB = BA$ (то есть операторы A и B коммутируют), то $e^{A+B} = e^A e^B$.

Задача 6. (а) Пусть $(i_1 \leq \ldots \leq i_k)$ — неубывающая последовательность натуральных чисел. Сформулируйте необходимые и достаточные условия на $(i_1, \ldots, i_k)$, при которых $i_j = \operatorname{Ker}(N^j)$ для некоторого нильпотентного оператора $N : \mathbb{R}^{i_k} \to \mathbb{R}^{i_k}$.

(б) Для оператора N из пункта (а) найдите явную формулу, выражающую количество жордановых клеток данного размера через $i_1, \ldots, i_k$.

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 4. Срок сдачи 13 февраля.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите жорданову нормальную форму оператора на $\mathbb{R}^4$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Вычислите экспоненту e^A от матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть U, $W \subset V$ — подпространства в векторном пространстве V. Докажите, что следующие два утверждени эквивалентны:

(1) $U \cap V = \{0\}$.

(2) Каждый вектор $v \in U + V$ *единственным образом* представляется в виде: $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$.

Задача 4. Нильпотентный оператор $N : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ удовлетворяет условиям:

$$\dim \operatorname{Ker}(N) = 3; \quad \dim \operatorname{Ker}(N^2) = 6.$$

Найдите его жорданову нормальную форму.

Задача 5. Найдите все инвариантные подпространства оператора на $\mathbb{R}^3$, который в некотором базисе записывается диагональной матрицей с числами 2, 2 и 1 на диагонали.