Семинар 7.

Геометрия и алгебра, весенний семестр 2018 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Предположим, то в некоторой группе выполнено тождество $xyz = e$. Следует ли него тождество $yzx = e$? А $yxz = e$?

Задача 2. Найдите все пары изоморфных групп в следующем списке (через R^* обозначается множество обратимых относительно умножения элементов кольца R):

$$(1)\ ((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times); \quad (2)\ ((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*, \times); \quad (3)\ (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +);$$
$$(4)\ (\mathbb{Q}^*, \times); \quad (5)\ (\mathbb{Q}, +); \quad (6)\ (\mathbb{R}^+, \times); \quad (7)\ (\mathbb{R}, +).$$

Задача 3. (а) Изоморфны ли $\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{C}^*$ как группы по умножению?

(б)* Изоморфны ли $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ как группы по сложению?

Задача 4. Группа движений плоскости действует на множестве треугольников.

(а) Найдите орбиты этого действия.

(б) Для каждого треугольника найдите его стабилизатор (=группу симметрий).

(в) Докажите, что группа симметрий равностороннего треугольника изоморфна S_3.

Задача 5. Верно ли, что каждая группа порядка

(а) 2; (б) 3; (в) 4

циклическая?

Задача 6. Рассмотрим действие группы $G = GL_2(\mathbb{C})$ сопряжениями на множестве 2×2-матриц, то есть элемент $g \in G$ переводит матрицу A в gAg^{-1}. Опишите все орбиты этого действия. Для каждой матрицы найдите её стабилизатор.

Задача 7. Классифицируйте все подгруппы в группе вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ по модулю n.

Задача 8. Группа из восьми элементов действует на множестве из семи элементов. Сколько неподвижных точек (=одноэлементных орбит) может быть у такого действия?

Задача 9. Группа действует с двумя орбитами на множестве из пяти элементов. При этом действие точное (то есть только единичный элемент группы действует как тождественное преобразование). Одна орбита состоит из двух элементов, а вторая — из трёх. Найдите все такие группы с точностью до изоморфизма.

Задача 10. Пусть G — группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих куб.

(а) Рассмотрим три действия группы G: на множестве вершин, рёбер и граней куба. Для каждого действия найдите все орбиты и стабилизаторы.

(б) Найдите порядок группы G.

(в) Докажите, что G изоморфна S_4.

Задача 11 ($\star$). (а) Пусть p — простое число, а $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ — группа всех ненулевых вычетов по модулю p по умножению (=мультипликативная группа поля вычетов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Докажите, что $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ — циклическая группа.

(б) Докажите, что все конечные подгруппы в мультипликативной группе поля являются циклическими.

Задача 12 ($\star$). Докажите, что группа порядка 35 циклическая.

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 5. Срок сдачи 20 февраля.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Изоморфны ли $\mathbb{R}^+$ (=положительные вещественные числа) и $\mathbb{R}^*$ (=ненулевые вещественные числа) как группы по умножению?

Задача 2. Пусть a, b — элементы некоторой группы. Предположим, что $a^5 = e$ и $a^3 b = b a^3$. Докажите, что $ab = ba$.

Задача 3. Группа из девяти элементов действует на множестве из 2018-ти элементов. Докажите, что у этого действия будет по крайней мере две неподвижные точки.

Задача 4. Пусть G — группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих правильный додекаэдр.

(а) Рассмотрим три действия группы G: на множестве вершин, рёбер и граней додекаэдра. Для каждого действия найдите все орбиты и стабилизаторы.

(б) Найдите порядок группы G.

Задача 5. Пусть G — группа, такая что $x^2 = e$ для любого $x \in G$. Докажите, что G абелева.