Семинар 8. Геометрия и алгебра, весенний семестр 2018 г.
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите все нормальные подгруппы в группах S_3, S_4 и S_5.

Задача 2. *Индексом подгруппы* называется число её левых классов смежности.

(а) Докажите, что подгруппа индекса два всегда нормальна.

(б) Пусть G — конечная группа, а p — минимальный простой делитель её порядка. Докажите, что каждая подгруппа в G индекса p нормальна.

Задача 3. Пусть V — вещественное векторное пространство размерности n, а $U \subset V$ — подпространство размерности k. Будем рассматривать векторные пространства как абелевы группы относительно сложения векторов. Докажите, что факторгруппа V/U и группа $\mathbb{R}^{n-k}$ изоморфны.

Задача 4. Пусть $G = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ — группа всех векторов с целочисленными координатами (относительно сложения векторов). Найдите факторгруппу G/H, где $H \subset G$ — подгруппа, порождённая следующими двумя векторами с целочисленными координатами:

(а) $(1, 1)$ и $(1, -1)$; (б) $(2, 4)$ и $(6, 8)$; (в) (a, b) и (c, d).

Задача 5. Пусть $A, B \subset G$ — две нормальные подгруппы в группе G, такие что $A \cap B = \{e\}$. Докажите, что $ab = ba$ для любых элементов $a \in A$, $b \in B$.

Задача 6. *Центром* группы G называется множество таких элементов z, что $zg = gz$ для всех $g \in G$ (то есть элементы центра коммутируют со всеми элементами группы).

(а) Найдите центр группы $GL_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — поле.

(б) Найдите порядок группы $PGL_n(\mathbb{F}_q)$ (=факторгруппа $GL_n(\mathbb{F}_q)$ по центру), где $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов.

Задача 7. Найдите группы (а) $PGL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; (б) $PGL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$; (в)* $PGL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

Задача 8. Докажите, что группа порядка p^n, где p — простое число, имеет нетривиальный центр.

Задача 9. (а) Группа G порождена двумя образующими, x и y, и тремя соотношениями $x^n = e$, $y^2 = e$, $xyxy = e$. Докажите, что G изоморфна группе диэдра D_n.

(б)* Группа G порождена $(n-1)$ образующими, $s_1, \ldots, s_{n-1}$, и тремя типами соотношений

(1) $s_i^2 = e$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$;

(2) $s_i s_j = s_j s_i$ при $|i - j| \geq 2$ (*дальняя коммутативность*);

(3) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ для всех $i = 1, \ldots, n-2$ (*соотношение группы кос*).

Докажите, что G изоморфна группе перестановок S_n.

(в)** Группа G порождена двумя образующими, S и T, и двумя соотношениями $S^2 = e$, $(ST)^3 = e$. Докажите, что G изоморфна *модулярной группе* $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Задача 10 (Теорема Бернсайда). (а) Пусть конечная группа G действует на множестве X. Докажите, что число орбит $|X/G|$ равно среднему числу неподвижных точек элемента группы G, то есть

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

где $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$.

(б) Найдите число разных способов покрасить грани куба в три цвета. Две раскраски считаются разными, если одна не получается из другой вращением куба.

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 6. Срок сдачи 27 февраля.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите все нормальные подгруппы в группе симметрий квадрата.

Задача 2. Найдите факторгруппу $\mathbb{Z}^2/H$, где $H \subset \mathbb{Z}^2$ — подгруппа, состоящая из векторов с чётными координатами, сумма которых делится на 3.

Задача 3. Группа G порождена двумя образующими, x и y, и соотношениями $x^2 = e$, $y^2 = e$, $xyx = yxy$. Докажите, что G изоморфна группе перестановок S_3.

Задача 4. В группе G нечётного порядка есть нормальная подгруппа N порядка 5. Докажите, что N лежит в центре группы G (это означает, что каждый элемент $n \in N$ коммутирует с каждым элементом $g \in G$, то есть $ng = gn$).

Задача 5. Найдите порядок группы $PSL_2(\mathbb{F}_q)$ (=факторгруппа $SL_2(\mathbb{F}_q)$ по центру), где $\mathbb{F}$ — конечное поле из q элементов.