Семинар 9. Геометрия и алгебра, весенний семестр 2019 г.
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть V — пространство вещественных многочленов степени не выше 2.

(а) Проверьте, что многочлены $e_1 = (x-2)(x-3)$, $e_2 = (x-1)(x-3)$ и $e_3 = (x-1)(x-2)$ образуют базис в V и найдите двойственный базис e_1^*, e_2^*, e_3^*.

(б) Та же задача для базиса $e_1 = 1$, $e_2 = (x-1)$ и $e_3 = (x-1)^2$.

(в) Рассмотрим оператор:

$$T : V \to V; \quad T : f(x) \mapsto f(x+2).$$

Выпишите матрицы сопряжённого оператора $T^* : V^* \to V^*$ в базисах (e_1^*, e_2^*, e_3^*) из пунктов (а) и (б).

Задача 2. Пусть $V = \mathbb{R}^4$, а $W \subset V$ — подпространство, порождённое векторами $(1,2,3,4)$, $(1,2,1,-1)$ и $(2,4,4,3)$. Найдите аннулятор $\operatorname{Ann}(W) \subset V^*$. Чему равен $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(W)) \subset V$?

Задача 3. Пусть V — векторное пространство $n \times n$ матриц. Докажите, что каждая линейная функция $f \in V^*$ представляется в виде:

$$f(X) = \operatorname{tr}(AX)$$

для некоторой матрицы A.

Задача 4. Пусть V — векторное пространство размерности n, а $W \subset V$ — подпространство. Докажите, что

$$\dim \operatorname{Ann}(W) + \dim W = n.$$

Задача 5. Пусть V — векторное пространство размерности n.

(а) Докажите, что n ковекторов $f_1,\ldots, f_n \in V^*$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда существует такой ненулевой вектор $v \in V$, что $f_1(v) = \ldots = f_n(v) = 0$.

(б) Пусть $m < n$. Докажите, что m ковекторов $f_1,\ldots, f_m \in V^*$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда существует $(n-m+1)$-мерное подпространство $W \subset V$ такое, что $f_1|_W = \ldots = f_n|_W = 0$.

Задача 6. Пусть V — конечномерное векторное пространство, а $T : V \to V$ — линейный оператор. Докажите, что

$$\text{(а) } \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} T) = \operatorname{Im} T^*; \quad \text{(б) } \operatorname{Ann}(\operatorname{Im} T) = \operatorname{Ker} T^*.$$

Задача 7. Рассмотрим евклидово пространство $V = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

(а) Покажите, что отображение

$$V \to V^*; \quad v \mapsto (\cdot, v)$$

задаёт изоморфизм векторных пространств.

(б) Отождествим V и V^*, используя изоморфизм их пункта (а). Оператор $S : V \to V$ называется *самосопряжённым*, если $S = S^*$. Покажите, что матрица самосопряжённого оператора в любом ортонормальном базисе является симметрической.

(в) Оператор $R : V \to V$ называется *ортогональным*, если $R^* = R^{-1}$. Докажите, что оператор ортогонален тогда и только тогда, когда он сохраняет расстояния (то есть является движением).

Задача 8. Докажите, что каждый самосопряжённый оператор на

(а) $\mathbb{R}^2$; (б) $\mathbb{R}^3$; (в) $\mathbb{R}^4$

диагонализуется в некотором ортонормальном базисе.