Алгебра и геометрия, весенний семестр 2019 г.

Темы устного коллоквиума.

факультет математики, НИУ ВШЭ

(1) Определения: кольцо, поле. Примеры: целые числа, комплексные числа, поле из двух элементов. Объяснение, почему (-1)(-1)=1. Комплексные числа как преобразования плоскости. Основная теорема алгебры (без доказательства). [KR, гл. 2, §5], [AV, рассказ “Аксиоматический метод”], [AI, M, PN]

(2) Определения: сложение векторов и умножение на число в вещественном координатном пространстве, 8 свойств (аксиомы векторного пространства), линейное отображение, матрицы и произведение матриц. Примеры: одномерный случай, матрица умноженная на столбец дает столбец, матрица для поворота на 90 градусов и для поворота на произвольный угол. Каждое линейное отображение задается матрицей. [Ar, гл. 1, §1], [K1, гл. 2], [3blue1brown]

(3) Определения: скалярное произведение, длина, расстояние, метрика, площадь, объём. Примеры: евклидова метрика, метрика такси. Билинейность скалярного произведения. Вычисление косинуса угла между векторами через скалярное произведение. Вычисление площади параллелограмма через равносоставленность. [Ar, гл. 7, §1], [K2, гл. 1, §4], [3blue1brown]

(4) Определения: группа перестановок, инверсии (беспорядки), длина и знак перестановки, транспозиции и циклы. Связь между знаком перестановки и ориентированным объёмом параллелепипеда. Перестановка раскладывается в произведение непересекающихся циклов. Задача об арестантах. Группы симметрий правильных многоугольников, тетраэдра и куба. [Ar, гл. 1, §4, гл. 5, §1-3], [K1, гл. 1, §8], [K3, гл. 3, §3], [KS, MP]

(5) Определения: делимость в кольцах, простые и неприводимые элементы, деление с остатком. Примеры: целые числа, гауссовы целые числа, неприводимый и не простой элемент в $Z[\sqrt{5}]$, кольцо многочленов с коэффициентами в поле. Решето Эратосфена. Алгоритм Евклида, цепные дроби и представление НОД(a, b) в виде линейной комбинации чисел a и b. Основная теорема арифметики. Деление с остатком в гауссовых целых числах. [Ar, гл. 11, §§1-4], [K1, гл. 1, §9; гл. 5, §3], [Ka, N]

(6) Определения: векторное пространство, векторы, скаляры, линейная комбинация, линейная зависимость, элементарные преобразования строк матрицы. Примеры: координатное векторное пространство. Метод Гаусса. Приведение матрицы к стандартной ступенчатой форме преобразованиями строк, решение систем линейных уравнений и поиск линейной зависимости между векторами. [Ar, гл. 1, §2; гл. 3, §§1-2], [K1, гл. 1, §3], [K2, гл. 1, §1]

(7) Определения: векторное подпространство, пересечение и сумма подпространств, порождающий набор, базис, координаты, размерность, линейный оператор, его ядро и образ, изоморфизм. Примеры: базисы в пространстве многочленов и интерполяционная формула Лагранжа. Любые два базиса в векторном пространстве равномощны (только конечномерный случай). Каждое векторное пространство изоморфно координатному векторному пространству. [Ar, гл. 3, §§3-4; гл. 4, §§1], [K1, гл. 2, §§1-3], [K2, гл. 1, §§1-2; гл. 2, §1]

(8) Определения: матрица линейного оператора, ранг линейного оператора и матрицы. Примеры: движения плоскости, преобразования фоторедактора, дифференцирование многочленов, линейные функции. Как выбрать базисы в области определения и области значений, чтобы матрица линейного оператора имела наиболее простой вид. При композиции линейных операторов их матрицы перемножаются. Ранг оператора равен размерности его области определения минус размерность ядра. Критерии обратимости линейного оператора в терминах его ядра и образа. [Ar, гл. 4, §§1-2], [K1, гл. 2, §§2-3], [K2, гл. 1, §3; гл. 2, §1]

(9) Определения: определитель как ориентированный объём параллелепипеда, определитель линейного оператора, определитель матрицы. Примеры: определители в размерности 2 и 3, равносоставленные параллелограммы имеют равные площади. Вычисление определителя с помощью элементарных преобразований столбцов. Явная формула для определителя. [Ar, гл. 1, §§3-4], [K1, гл. 3]

(10) Определения: аксиоматическое определение определителя (полилинейность, кососимметричность, нормировка); аффинные пространства и подпространства, репер. Примеры: векторное произведение как внешнее; пространство решений неоднородной системы линейных уравнений. Теорема существования и единственности определителя. Разложение определителя по строке. Определитель произведения матриц равен произведению определителей. Связь понятия репера и понятия базиса. [Ar, гл. 1, §§3-4], [K1, гл. 3], [K2, гл. 4, §1; гл. 6, §3]

(11) Определения: евклидовы пространства, длины, углы, расстояния, ортогональное дополнение к подпространству, ортогональный и ортонормированный базисы. Примеры: школьная плоскость, физическое пространство. Теорема Пифагора. Неравенство треугольника. Расстояние от точки до подпространства, угол между вектором и подпространством, расстояние между скрещивающимися подпространствами. [Ar, гл. 7, §§1-3], [K2, гл. 3, §1; гл. 4, §2]. [P, гл. 3]

(12) Определения: матрица Грама билинейной формы. Примеры: матрица Грама стандартного скалярного произведения. Ортогонализация Грама-Шмидта для положительно определённой симметричной билинейной формы. Квадрат объёма параллелепипеда как определитель матрицы Грама. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Формула для расстояния от вектора до подпространства через матрицы Грама. Разложение вектора по ортонормальному базису. Метод наименьших квадратов. [Ar, гл. 7, §§1-3], [K2, гл. 3, §1; гл. 4, §2], [P, гл. 3]

(13) Определения: изометрии (движения) евклидова пространства, группы $GL_n(R)$ (полная линейная), $SL_n(R)$ (специальная линейная), $O_n(R)$ (ортогональная), $SO_n(R)$ (специальная ортогональная). Примеры: группа $O_2(R)$, группа поворотов плоскости $SO_2(R)$, группа поворотов трёхмерного пространства $SO_3(R)$. Изометрия является линейным преобразованием. Классификация движений плоскости. [Ar, гл. 8, §§1-4], [K2, гл. 3, §3; гл. 4, §3], [P, гл. 4]

(14) Определения: построение циркулем и линейкой, построимые комплексные числа, расширения полей, поликвадратичные расширения, степень расширения. Примеры: классические задачи древности, построение правильного пятиугольника. Степень башни расширений полей. Доказательство неразрешимости задач об удвоении куба и трисекции угла. [Ar, гл. 13, §§1-4], [K3, гл. 5, §1]

(15) Определения: собственные векторы, собственные значения и характеристический многочлен оператора. Связь с физическими задачами и линейными дифференциальными уравнениями. Собственные векторы с попарно различными собственными значениями линейно независимы. [Ar, гл. 4, §§3-7],[K2, гл. 2, §3]
(16) Определения: диагонализуемые операторы, след оператора, сопряжённые (подобные) матрицы. Матрицы оператора в разных базисах сопряжены. Почти любой оператор над полем комплексных чисел диагонализуем. Теорема Гамильтона-Кэли. Вычисление степени оператора с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа. [Ar, гл. 4, §§3-7],[K2, гл. 2, §§2-4]
(17) Определения: жорданова клетка, минимальный многочлен оператора, собственные и корневые подпространства. У каждого оператора над полем комплексных чисел есть жорданова нормальная форма. Явные формулы для рекуррентных последовательностей. [V], [Ar, гл. 12, §7],[K2, гл. 2, §4]
(18) Определения: спектр оператора, инвариантные подпространства, прямая сумма подпространств. Пространство с оператором раскладывается в прямую сумму корневых подпространств. Жорданова нормальная форма нильпотентного оператора. [Ax], [Ar, гл. 12, §7],[K2, гл. 2, §4]

Список литературы

[3blue1brown] 3blue1brown, *The Essence of Linear Algebra*, серия видеороликов
[AV] В.И. Арнольд, *Истории давние и недавние*, Фазис, 2005
[AI] И.В. Арнольд, *Отрицательные числа в курсе алгебры*, (Серия "Педагогическая библиотека учителя") М.-Л., изд-во АПН РСФСР, 1947
[Ar] M. Artin, *Algebra*, Pearson, 2011
[Ax] Sh. Axler, *Down with determinants!*, American Mathematical Monthly **102** (1995), 139–154
[Ka] Л.А.Калужин, *Основная теорема арифметики*, М., "Наука", 1969
[Ki] В.А. Кириченко, *Построения циркулем и линейкой и теория Галуа*, записки лекций, школа "Современная математика", Дубна, 2005
[KS] Е.Ю.Смирнов, В.А.Кириченко, *Молочный пакет или пирамидка из прямоугольника*, Квантик, №6 (2017), с. 14-15
[K1] А.И. Кострикин, *Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры*, Физико-математическая литература, 2001
[K2] А.И. Кострикин, *Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра*, Физико-математическая литература, 2001
[K3] А.И. Кострикин, *Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры*, Физико-математическая литература, 2001
[KR] Р. Курант, Г. Роббинс, *Что такое математика?*. М., МЦНМО, 2013
[M] Mathologer, *A negative times a negative is a...*, видеоролик
[MP] Minutephysics, *An impossible bet*, видеоролик
[N] Numberphile, *Encryption and huge numbers*, видеоролик
[P] Т.Е. Панов, *Линейная алгебра и геометрия*, записки лекций
[PN] ПостНаука, *Понятие числа от Евдокса до Клиффорда*, видеоролик
[Sh] Ю.А. Шашкин, *Неподвижные точки*, М., "Наука" 1989 г.
[V] Н.Н. Воробьёв, *Числа Фибоначчи*, М., "Наука" 1978 г.