

**Семинар 10.**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Найдите поляризации следующих квадратичных форм на  $\mathbb{R}^2$ :

(а)  $x_1^2 + x_2^2$ ; (б)  $2x_1x_2$ ; (в)  $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ .

**Задача 2.** Для каждой квадратичной формы  $Q$  из задачи 1 выпишите в стандартном базисе матрицу самосопряжённого оператора  $T_Q$ , определённого формулой:

$$(T_Q(v), u) = Q_{\text{pol}}(u, v) \text{ для всех } u, v \in \mathbb{R}^2.$$

Через  $Q_{\text{pol}}$  обозначается поляризация формы  $Q$ .

**Задача 3.** Пусть  $V$  — векторное пространство вещественных  $n \times n$  матриц. Является ли функция

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}; \quad Q(A) := \text{tr}(A^2)$$

квадратичной формой? Если является, то чему равна её поляризация?

**Задача 4.** Диагонализуйте операторы в ортонормированном базисе:

(а)  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ; (б)  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ; (в)  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ; (г)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Матрицы выписаны в стандартном базисе в  $\mathbb{R}^n$ , через  $a$  обозначается вещественный параметр.

**Задача 5.** Приведите к главным осям коники, заданные уравнениями:

(а)  $x_1^2 + ax_1x_2 + x_2^2 = 1$ ; (б)  $x_1^2 + ax_1x_2 = 1$ .

Через  $a$  обозначается вещественный параметр.

**Задача 6.** Приведите к главным осям квадрику в  $\mathbb{R}^3$ , заданную уравнением:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1.$$

**Задача 7.** Покажите, что движением плоскости каждая непустая коника в  $\mathbb{R}^2$  приводится к одной из следующих канонических форм:

(1) эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; (2) гипербола  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; (3) парабола  $a^2x^2 - y = 0$ ;

(4) пара прямых  $xy = 0$ ; (5) двойная прямая  $x^2 = 0$ ; (6) точка  $x^2 + y^2 = 0$ .

**Задача 8.** Пусть  $Q(x, y, z)$  — невырожденная квадратичная форма (= ранг её матрицы в каком-нибудь базисе равен 3). Докажите, что если множество  $\{Q(x, y, z) = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  непусто, то оно конгруэнтно одной из следующих поверхностей:

(1) эллипсоид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;

(2) однополостный гиперболоид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;

(3) двуполостный гиперболоид  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Задача 9.** Квадратичная форма в некоем ортонормированном базисе в  $\mathbb{R}^n$  имеет матрицу с элементами  $a$  на диагонали и  $b$  вне неё. К какому наиболее простому виду можно её привести, перейдя к другому ортонормированному базису?