Семинар 11. Геометрия и алгебра, весенний семестр 2019 г.
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Определение 1. *Пусть $T : V \to V$ — оператор на конечномерном евклидовом или унитарном пространстве со скалярным или эрмитовым произведением $(\cdot, \cdot)$, соответственно. Сопряжённый оператор $T^* : V \to V$ задаётся тождеством:*

$$(T(u), v) = (u, T^*(v)) \text{ для всех } u, v \in V.$$

Задача 1. Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан в стандартном базисе матрицей:

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу сопряжённого оператора T^* в том же базисе. Какие из этих операторов будут самосопряжены?

Задача 2. Определим функцию $F(u, v)$ на парах векторов $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ в $\mathbb{C}^2$ по формуле:

(а) $F(u, v) = x_1y_1 + ix_1y_2 - ix_2y_1 + ix_2y_2$; (б) $F(u, v) = x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2$.

Является ли F полуторалинейной формой? А эрмитовой?

Задача 3. Оператор $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ задан в стандартном базисе матрицей:

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу сопряжённого оператора T^* в том же базисе.

Задача 4. Докажите, что если A — матрица оператора $T : V \to V$ в некотором ортонормированном базисе, то матрица сопряжённого оператора T^* в том же базисе равна:

(а) A^t, если $V = \mathbb{R}^n$; (б) $\overline{A^t}$, если $V = \mathbb{C}^n$.

(в) Останутся ли утверждения пунктов (а) и (б) верными для неортонормального базиса?

Задача 5. Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *ортогональный* оператор, то есть $TT^* = I$. Покажите, что в некотором ортономированном базисе матрица оператора T будет блочно-диагональной с 1×1 или 2×2 блоками вида:

$$(1); \quad (-1); \quad \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

(а) при $n = 2$; (б) при $n = 3$; (в) при произвольном n.

Задача 6. (а) Пусть $E = \{\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} + \frac{z^2}{\lambda_3^2} = 1\}$ — эллипсоид в трёхмерном пространстве (будем считать, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$), а $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, проходящая через начало координат. Обозначим через μ_1 и μ_2, соответственно, длины большой и малой полуосей эллипса $E \cap \Pi$. Докажите неравенства:

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3.$$

(б) Придумайте и докажите обобщение пункта (а) на эллипсоид в n-мерном евклидовом пространстве.

Задача 7. Пусть $H = \{z^2 - xy = 1\}$ — однополостный гиперболоид.

(а) Найдите на H три попарно скрещивающихся прямых.

(б) Докажите, что если прямая пересекает все три прямые из пункта (а), то она лежит на гиперболоиде H. Конечно или бесконечно множество таких прямых?

(в) Добавим к прямым l_1, l_2, l_3 из пункта (а) четвёртую прямую $l_4 = \{(-t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Сколько прямых в пространстве пересекают одновременно l_1, l_2, l_3 и l_4?