Геометрия и алгебра, весенний семестр 2019 г.

Семинар 12.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Квадратичная форма в стандартном базисе в $\mathbb{R}^4$ имеет матрицу с элементами 2 на диагонали и 1 вне неё. К какому наиболее простому виду можно её привести, перейдя к другому базису?

Определение 1. *Пусть $Q : V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма на конечномерном евклидовом пространстве. Сигнатурой формы Q называется пара чисел (p, q), где p и q — количество положительных и отрцательных, соответственно, собственных чисел матрицы формы Q в каком-нибудь ортонормированном базисе.*

Задача 2. Найдите сигнатуру квадратичных форм на $\mathbb{R}^n$:
(а) $x_1^2 - x_2^2$; (б) x_1x_2; (в) $\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.

Задача 3. Докажите, что если Q — квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$, то её сигнатура (p, q) на самом деле не зависит от выбора скалярного произведения на $\mathbb{R}^n$, и может быть определена инвариантно следующим образом:
(а) $p + q$ совпадает с рангом матрицы квадратичной формы Q в произвольном базисе (не обязательно ортонормальном);
(б) p совпадает с максимально возможной размерностью подпространства $U \subset V$, на котором форма $Q|_U$ положительно определена.

Задача 4. Найдите сигнатуру квадратичной формы Q на пространстве вещественных $n \times n$-матриц:
(а) $n = 2$, $Q(A) = \det(A)$;
(б) n — произвольное, $Q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$.

Задача 5. Существует ли на $\mathbb{R}^4$ квадратичная форма с главными угловыми минорами:
(а) $M_1 < 0$, $M_2 = 0$, $M_3 < 0$, $M_4 > 0$;
(б) $M_1 < 0$, $M_2 = 0$, $M_3 > 0$, $M_4 > 0$;
(в) $M_1 < 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = 0$, $M_4 > 0$?

Задача 6. Докажите, что для каждого обратимого оператора T в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ найдётся такой ортогональный базис $v_1,\ldots, v_n$, что базис $T(v_1),\ldots, T(v_n)$ тоже ортогонален.