

Семинар 13.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Определение 1. Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — симметричная билинейная форма на конечномерном векторном пространстве над полем \mathbb{F} . Ортогоналом подпространства $U \subset V$ относительно формы B называется подпространство:

$$U^\perp := \{w \in V \mid B(u, w) = 0 \text{ для всех } u \in U\}.$$

Задача 1. Найдите ортогонал U^\perp к гиперплоскости $U = \{x_1 = 0\}$ относительно следующих билинейных форм на \mathbb{R}^3 :

(а) $B(u, v) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$; (б) $B(u, v) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$;

(в) $B(u, v) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$; (г) $B(u, v) = x_2y_2 + x_3y_3$.

Через (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) обозначаются координаты векторов u и v , соответственно.

Задача 2. (а) Существует ли такая невырожденная билинейная форма на \mathbb{R}^{2n} , что $U = U^\perp$ относительно этой формы, и при этом $\dim U = n$?

(б) Тот же вопрос для $\dim U > n$.

Задача 3. Для каждого пункта задачи 1 выясните, раскладывается ли пространство \mathbb{R}^3 в прямую сумму $U \oplus U^\perp$.

Задача 4. Пусть B — билинейная форма на \mathbb{R}^4 , заданная в стандартном базисе матрицей Грама:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 3 \\ 5 & 0 & 12 & 0 \\ 10 & 12 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix},$$

а $U \subset \mathbb{R}^4$ — пространство решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Выясните, раскладывается ли \mathbb{R}^4 в прямую сумму подпространств U и U^\perp . Если раскладывается, то представьте вектор $v = (-8, 6, 15, 6)$ в виде суммы $v = u + u^\perp$, где $u \in U$, а $u^\perp \in U^\perp$.