Алгебра и геометрия, весенний семестр 2019 г.

Листок 2.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть $A, B \subset G$ — две нормальные подгруппы в группе G, такие что $A \cap B = \{e\}$. Докажите, что $ab = ba$ для любых элементов $a \in A$, $b \in B$.

Задача 2. Постройте изоморфизмы групп:

(а) $S_3 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_2)$; (б) $S_4 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_3)$; (в) $A_5 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_5)$; (г) $A_5 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_4)$.

Через $\mathbb{F}_q$ обозначается конечное поле из q элементов.

Задача 3. Пусть G — конечная группа, а p — минимальный простой делитель её порядка. Докажите, что каждая подгруппа в G индекса p нормальна.

Задача 4. Докажите, что группа порядка 35 циклическая.

Задача 5. (а) Группа G порождена $(n-1)$ образующими, $s_1, \ldots, s_{n-1}$, и тремя типами соотношений

(1) $s_i^2 = e$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$;
(2) $s_i s_j = s_j s_i$ при $|i-j| \geq 2$ (*дальняя коммутативность*);
(3) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ для всех $i = 1, \ldots, n-2$ (*соотношение группы кос*).

Докажите, что G изоморфна группе перестановок S_n.

(б) Группа G порождена двумя образующими, S и T, и двумя соотношениями $S^2 = e$, $(ST)^3 = e$. Докажите, что G изоморфна *модулярной группе* $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Задача 6. Найдите все конечные группы (с точностью до изоморфизма), в которых есть ровно три класса сопряжённости.

Задача 7. В некоторой конечной группе можно выбрать по одному представителю в каждом классе сопряжённости так, что все они будут коммутировать. Докажите, что группа абелева. Останется ли утверждение задачи верным, если не требовать конечности группы?

Задача 8. Докажите, что группа порядка p^n, где p — простое число, имеет подгруппу порядка p^k для всех $k = 0, 1, \ldots, n$.

Задача 9 (Теорема Бернсайда)**.** (а) Пусть конечная группа G действует на множестве X. Докажите, что число орбит $|X/G|$ равно среднему числу неподвижных точек элемента группы G, то есть

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

где $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$.

(б) Найдите число разных способов покрасить грани куба в три цвета. Две раскраски считаются разными, если одна не получается из другой вращением куба.

Задача 10. (а) Пусть p — простое число, а $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ — группа всех ненулевых вычетов по модулю p по умножению (=мультипликативная группа поля вычетов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Докажите, что $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ — циклическая группа.

(б) Докажите, что все конечные подгруппы в мультипликативной группе поля являются циклическими.