Геометрия и алгебра, весенний семестр 2019 г.

Семинар 14.

факультет математики, НИУ ВШЭ

В задачах 1-4 действие происходит в вещественном аффинном пространстве. Через $\mathbb{F}$ обозначается произвольное поле.

Определение 1. *Центральной проекцией точки A из точки O (центра проекции) на гиперплоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ называется точка A', в которой прямая OA пересекает гиперплоскость Π.*

Задача 1. На прямой $l_1 = \{y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ даны три точки $A = (1,0)$, $B = (2,0)$, $C = (3,0)$ (через (x,y) обозначаются координаты в $\mathbb{R}^2$ в некотором базисе). В какие тройки точек на прямой $l_2 = \{x = 0\}$ можно перевести точки A, B и C центральными проекциями из точек $O \in \mathbb{R}^2$?

Задача 2. (а) Какой фигурой может быть проекция треугольника на плоскость в $\mathbb{R}^3$, если центр проекции не лежит в его плоскости?

(б) Тот же вопрос для круга $\{(x,y,1) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Задача 3 (Теорема Дезарга). (а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 на плоскости пересекаются в одной точке O, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой. (Иными словами, если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ есть центр перспективы, то у них есть и ось перспективы.)

(б) Докажите обратное утверждение.

Задача 4. Автобусная сеть города устроена следующим образом:

(1) с каждой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

(2) для каждой пары маршрутов найдётся, и притом единственная, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

Известно, что на каждом маршруте ровно три остановки, и маршрутов больше одного. Сколько автобусных маршрутов в городе?

Задача 5. В городе 57 автобусных маршрутов,удовлетворяющих правилам (1) и (2) из задачи 4. Известно, что на каждом маршруте не менее трёх остановок. Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

Задача 6. (а) Докажите, что каждую тройку прямых в векторной плоскости $\mathbb{F}^2$ с координатами (x,y) можно перевести линейным преобразованием в тройку прямых $\{y = 0\}$, $\{x = 0\}$ и $\{y = x\}$.

(б) Куда перейдёт прямая $\{y = ax\}$, где $a \in \mathbb{F}$, при преобразовании из пункта (а)?

Задача 7. Докажите, что проективное преобразование прямой $\mathbb{FP}^1$ однозначно определяется образами трех произвольных точек.

Задача 8. Отождествим проективную прямую $\mathbb{FP}^1$ с множеством $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$. Докажите, что преобразование множества $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ является проективным тогда и только тогда, когда в ограничении на $\mathbb{F}$ оно представляется в виде

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d},$$

где a, b, c, d — такие элементы поля $\mathbb{F}$, что $ad - bc \neq 0$. (Такие отображения называют дробно-линейными.)

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 7. Срок сдачи 17 апреля.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите поляризацию квадратичной формы на $\mathbb{R}^3$:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3.$$

Задача 2. Приведите к главным осям квадрику в $\mathbb{R}^3$, заданную уравнением:

$$x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 = 1.$$

Определите тип этой квадрики.

Задача 3. Найдите сигнатуру квадратичной формы на $\mathbb{R}^4$, которая в некотором базисе имеет матрицу с элементами 1 на диагонали и 2 вне неё.

Задача 4. Существует ли на $\mathbb{R}^4$ квадратичная форма с главными угловыми минорами:

$$M_1 > 0,\ M_2 = 0,\ M_3 < 0,\ M_4 > 0?$$

Если существует, то найдите её сигнатуру. Если не существует, объясните почему.

Задача 5. Пусть $H = \{(x, y, z) \mid y(x + z - 1) - xz = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ — однополостный гиперболоид.

(а) Найдите на H три попарно скрещивающихся прямых.

(б) Докажите, что если прямая пересекает все три прямые из пункта (а), то она лежит на гиперболоиде H.