Геометрия и алгебра, весенний семестр 2019 г.
Семинар 15.
факультет математики, НИУ ВШЭ

В задачах 3-5 действие происходит на евклидовой аффинной плоскости.

Задача 1. (а) Пусть $l_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_1 = 0\}$ и $l_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_1 - x_2 = 0\}$ — проективные прямые в $\mathbb{RP}^2$. Нарисуйте пересечения прямых l_1 и l_2 с аффинными картами $\mathbb{A}^2_0 = \{x_0 \neq 0\}$, $\mathbb{A}^2_1 = \{x_1 \neq 0\}$ и $\mathbb{A}^2_2 = \{x_2 \neq 0\}$.

(б) Тот же вопрос для кривой (*проективной коники*), заданной однородным уравнением степени два: $x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_2 = 0$.

Задача 2. Пусть $l = \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{RP}^2$ — проективная прямая.

(а) Покажите, что $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{A}^2_0 \sqcup l$ (то есть про прямую l можно думать как про "бесконечно удалённую прямую" относительно аффинной карты $\mathbb{A}^2_0$).

(б) Пусть $p \in l$ — произвольная точка. Покажите, что любую аффинную прямую в $\mathbb{A}^2_0$ можно проективным преобразованием перевести в $l \setminus \{p\}$.

Задача 3 (Теорема Фалеса)**.** Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла.

Задача 4 (Теорема о пропорциональных отрезках)**.** Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки.

Задача 5 (Теорема Паппа)**.** (а) На одной стороне угла выбраны точки A, B и C, а на другой — точки A', B' и C' (отличные от вершины угла), так что CA' и $C'A$ параллельны, и CB' и $C'B$ параллельны. Докажите, что и отрезки AB' и $A'B$ параллельны.

(б) Выведите из пункта (а) теорему Паппа:

Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, A', B', C' — три точки на другой прямой. Тогда точки пересечения прямых AB' и $B'A$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой.

Задача 6 (Топология проективных пространств)**.** (а) Будем рассматривать $\mathbb{RP}^1$ как факторпространство топологического пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (со стандартной топологией) относительно отношения эквивалентности

$$(x, y) \sim (x', y'), \text{ если } x = \lambda x',\ y = \lambda y' \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Докажите, что вещественная проективная прямая гомеоморфна окружности, то есть $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$.

(б) Аналогично наделим топологией комплексную проективную прямую $\mathbb{CP}^1$. Докажите, что $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$.

(в) Докажите, что из $\mathbb{RP}^2$ можно вырезать открытый двумерный диск так, что останется лента Мёбиуса.

(г)* Докажите, что $SO_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{RP}^3$.

Задача 7. Докажите, что проективное преобразование n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^n$ однозначно определяется образами $n+2$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости.

Задача 8 (*Недезаргова плоскость)**.** Приведите пример плоскости, которая удовлетворяет трём аксиомам проективной плоскости, но в которой неверна теорема Дезарга:

У двух треугольников на плоскости есть центр перспективы тогда и только тогда, когда у них есть ось перспективы.