Геометрия и алгебра, весенний семестр 2019 г.

Семинар 16.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Покажите, что группа проективных преобразований $PGL_2(\mathbb{F})$ проективной прямой над полем $\mathbb{F}$ порождается преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(б) Покажите, что группа дробно-линейных преобразований поля $\mathbb{F}$ порождается преобразованиями:

$$t \mapsto t + b; \quad t \mapsto at; \quad t \mapsto \frac{1}{t}.$$

(в) Покажите, что каждый линейный проективный изоморфизм прямых $l, l' \subset \mathbb{P}^2$ (то есть *гомографию*) можно представить в виде композиции центральных проекций.

Определение 1. *Двойным отношением* $[a, b, c, d]$ *чисел* a, b, c, $d \in \mathbb{F}$ *называется точка проективной прямой с однородными координатами* $((a - c)(b - d) : (a - d)(b - c))$.

Задача 2. (а) Напишите явную формулу для дробно-линейного преобразования поля $\mathbb{F}$, переводящего три попарно различные точки a, b, $c \in \mathbb{F}$ в точки ∞, 0 и 1, соответственно.

(б) Куда при этом преобразовании перейдёт точка $d \in \mathbb{F}$?

Задача 3. (а) Пусть L_a, L_b, L_c — три попарно различные прямые в векторной плоскости $\mathbb{F}^2$ с координатами (x_0, x_1), натянутые на векторы $a = (a_0, a_1)$, $b = (b_0, b_1)$, $c = (c_0, c_1)$, соответственно. Покажите, что существует линейное преобразование плоскости, переводящее прямую L_a в прямую $\{x_0 = 0\}$, прямую L_b в прямую $\{x_1 = 0\}$ и прямую L_c — в прямую $\{x_0 = x_1\}$.

(б) Куда при этом преобразовании перейдёт прямая L_d, натянутая на вектор $d = (d_0, d_1)$?

(в) Определите какой-нибудь проективный инвариант четвёрки прямых L_a, L_b, L_c, L_d относительно линейных преобразований (то есть сопоставьте четвёрке прямых точку $p(a, b, c, d) \in \mathbb{P}^1$, так чтобы линейно эквивалентным четвёркам прямых соответствовала одна и та же точка, а неэквивалентным — разные точки).

(г)* Что является инвариантом четвёрки попарно непересекающихся подпространств размерности n в $\mathbb{C}^{2n}$ относительно линейных преобразований?

Задача 4. Найдите прообраз точки $-\frac{35}{46}$ при дробно-линейном преобразовании рациональной проективной прямой, переводящем точки 2, $\frac{4}{3}$, 1, соответственно, в точки $-\frac{5}{6}$, $-\frac{11}{14}$, $-\frac{3}{4}$.

Задача 5. Найдите группу проективных преобразований проективной прямой над конечным полем из q элементов для q, равного (а) 2; (б) 3; (в)* 4; (г)* 5.

Задача 6. Пусть $T : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ — дробно-линейное преобразование комплексной прямой $\mathbb{C}$. Отождествим $\mathbb{C}$ с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$.

(а) Покажите, что T сохраняет углы (то есть *конформно*).

(б) Покажите, что T переводит евклидовы прямые и окружности в прямые и/или окружности.

(в) Покажите, что точки z_1, z_2, z_3, $z_4 \in \mathbb{C}$ лежат на одной евклидовой окружности или прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно (то есть лежит в $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{CP}^1$).

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 8. Срок сдачи 15 мая.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Пусть l_1 и l_2 — проективные прямые в $\mathbb{P}^2$. Известно, что пересечения прямых l_1 и l_2 с аффинной картой $\mathbb{A}_0^2 = \{x_0 \neq 0\}$ в координатах $t_1 = \frac{x_1}{x_0}$ и $t_2 = \frac{x_2}{x_0}$ задаются уравнениями $t_1 + 2t_2 = 6$ и $t_1 + t_2 = 4$, соответственно. Какими уравнениями задаются пересечения этих прямых с аффинной картой $\mathbb{A}_1^2 = \{x_1 \neq 0\}$ в координатах $u_1 = \frac{x_0}{x_1}$ и $u_2 = \frac{x_2}{x_1}$?

Задача 2. Назовём *комплексной окружностью* аффинную конику в $\mathbb{C}^2$, заданную уравнением $(t_1 - a)^2 + (t_2 - b)^2 = c$ (где a, b, $c \in \mathbb{C}$, и $c \neq 0$). Покажите, что пересечение комплексной проективной коники с аффинной картой $\mathbb{C}_0^2$ является комплексной окружностью тогда и только тогда, когда коника проходит через точки $(0 : i : \pm 1)$ (“мнимые бесконечно удалённые точки”).

Задача 3. Найдите количество точек и прямых в проективной плоскости над полем из q элементов.

Задача 4. Пусть t — двойное отношение четвёрки точек (a, b, c, d) в $\mathbb{P}^1$. Чему может быть равно двойное отношение четвёрки точек $(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d))$, полученной из (a, b, c, d) перестановкой $\sigma \in S_4$?

Задача 5. Даны две различные прямые l и l' в аффинной карте $\mathbb{R}^2$. Известно, что проективное преобразование T переводит точки a, b, $c \in l$ в точки a', b', $c' \in l'$. Постройте одной линейкой образ точки $d \in l$ при преобразовании T.

Задача 6 (Бонус)**.** Опишите проективную плоскость над полем из четырёх элементов. Описание можно дать в виде графа, матрицы инцидентности или эскиза карточек для игры в Доббль. (Из описания должно быть понятно, какие точки лежат на каких прямых, и видно, что выполняются все аксиомы проективной плоскости.)