Геометрия и алгебра, весенний семестр 2019 г.
Семинар 17.
факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Докажите, что над полем $\mathbb{C}$ любое проективное преобразование имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Задача 2. Пусть p_1 и p_2 — две различные точки проективной прямой над полем из q элементов. Сколько существует проективных преобразований, переводящих p_1 в p_2?

Задача 3. (а) Докажите, что любую невырожденную непустую конику на $\mathbb{RP}^2$ можно проективным преобразованием перевести в конику C, заданную уравнением $-x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ (то есть все гладкие вещественные коники проективно эквивалентны).

(б) Опишите явно проективную двойственность относительно коники C в аффинной карте $\{x_0 \neq 0\}$.

(в) Опишите все проективные преобразования, которые сохраняют конику C.

Задача 4 (Теорема Паскаля)**.** (а) Шестиугольник $ABCDEF$ на евклидовой плоскости вписан в окружность. Докажите, что если стороны AB и DE параллельны, и стороны BC и EF параллельны, то и стороны CD и FA параллельны.

(б) Шестиугольник $ABCDEF$ на проективной плоскости вписан в конику. Докажите, что точки пересечения сторон AB и DE, сторон BC и EF и сторон CD и FA лежат на одной прямой.

Задача 5 (Теорема Брианшона)**.** Сформулируйте и докажите утверждение, двойственное к теореме Паскаля.

Задача 6. (а) Докажите, что через любые 5 точек на $\mathbb{P}^2$, никакие 4 из которых не коллинеарны, можно провести единственную конику.

(б) В условиях пункта (а) докажите, что если никакие три точки неколлинеарны, то коника гладкая.

(в) Докажите, что для любых пяти прямых в $\mathbb{P}^2$ найдётся коника, которая касается их всех. В каких случаях эта коника единственна? А в каких — гладкая?

(г)* Пусть $k=1,\ldots,4$. В $\mathbb{CP}^2$ даны k точек и $5-k$ прямых в общем положении. Сколько коник проходит через все данные точки и одновременно касается всех данных прямых?

Задача 7 (Код Хэмминга). (а) Выпишите матрицу инцидентности для точек и прямых в плоскости Фано. (*Матрицей инцидентности* конечной проективной плоскости Π называется таблица, строки которой занумерованы точками $p \in \Pi$, столбцы — прямыми $l \subset \Pi$, и на пересечении строки p и столбца l стоит 0, если $p \notin l$, и 1, если $p \in l$).

(б) Пусть H_1 — множество слов из нулей и единиц, полученных в качестве строк матрицы из пункта (а). Докажите, что расстояние Хэмминга между любыми двумя словами w, $w' \in H_1$ не меньше трёх. (*Расстоянием Хэмминга* между словами одинаковой длины из нулей и единиц называется количество позиций, на которых различаются соответствующие символы в этих словах.)

(в) Пусть H_2 — множество слов, полученных из слов множества H_1 заменой 0 на 1, а 1 — на 0. Рассмотрим множество $H = H_1 \cup H_2 \cup \{0000000, 1111111\}$. Покажите, что расстояние Хэмминга между любыми двумя словами из H по-прежнему не меньше трёх. Сколько всего слов в H?

(г) Придумайте удобный способ кодировать все слова длины 4 из нулей и единиц с помощью слов из H.

Задача 8. Найдите количество проективных подпространств размерности k в проективном пространстве размерности n над полем из q элементов.