

Семинар 18.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите все линейные преобразования вещественной плоскости \mathbb{R}^2 , которые сохраняют

- (а) окружность $x^2 + y^2 = 1$;
- (б) гиперболу $x^2 - y^2 = 1$.

Задача 2. Найдите все линейные преобразования вещественного пространства \mathbb{R}^3 , которые сохраняют

- (а) сферу $x^2 + y^2 = 1$;
- (б) гиперboloид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Задача 3. Опишите геометрически преобразование вещественной плоскости $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, заданное функцией $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

- (а) $f(z) = iz$; (б) $f(z) = 2z$; (в) $f(z) = \bar{z}$; (г) $f(z) = z + 2i$; (д) $f(z) = \frac{1}{z}$.

Задача 4. Нарисуйте образы горизонтальных и вертикальных прямых ($\text{Im } z = \text{const}$ и $\text{Re } z = \text{const}$) при отображении:

- (а) $f(z) = \frac{1}{z}$; (б) $f(z) = z^2$.

Также нарисуйте образ полосы $1 \leq \text{Re } z \leq 2$ и квадрата $1 \leq \text{Re } z, \text{Im } z \leq 2$.

Задача 5. Найдите преобразование Мёбиуса (то есть дробно-линейное преобразование $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$), которое переводит верхнюю полуплоскость $H = \{z \mid \text{Im } z \geq 0\}$ в единичный диск $D = \{|z| \leq 1\}$.

Задача 6. Найдите все преобразования Мёбиуса, которые переводят верхнюю полуплоскость H в себя.

Задача 7. Найдите преобразование Мёбиуса, которое переводит единичный диск D в себя, а центр диска — в точку $a \in \mathbb{C}$, где $|a| < 1$.

Определение 1. Модулярной группой называется группа $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Определение 2 (Фундаментальная область модулярной группы). В верхней полуплоскости определим область $\mathcal{D} = \{z \mid |z| > 1; |\text{Re } z| < \frac{1}{2}, \text{Im } z > 0\}$.

Определение 3 (Образующие модулярной группы). Определим преобразования Мёбиуса:

$$S = z \mapsto -\frac{1}{z}; \quad T = z \mapsto z + 1.$$

Задача 8. Нарисуйте образ области \mathcal{D} при отображениях S, T, ST, TS and STS .

Задача 9. Докажите, что $(ST)^3 = S^2 = \text{Id}$.