Алгебра и геометрия, весенний семестр 2019 г.

Листок 3.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Докажите, что центр данной окружности на евклидовой плоскости нельзя построить с помощью одной только линейки.

Задача 2 (Код Хэмминга). (а) Выпишите матрицу инцидентности для точек и прямых в плоскости Фано.

(б) Пусть H_1 — множество слов из нулей и единиц, полученных в качестве строк матрицы из пункта (а). Докажите, что расстояние Хэмминга между любыми двумя словами w, $w' \in H_1$ не меньше трёх.

(в) Пусть H_2 — множество слов, полученных из слов множества H_1 заменой 0 на 1, а 1 —на 0. Рассмотрим множество $H = H_1 \cup H_2 \cup \{0000000, 1111111\}$. Покажите, что расстояние Хэмминга между любыми двумя словами из H по-прежнему не меньше трёх. Сколько всего слов в H?

(г) Придумайте удобный способ кодировать все слова длины 4 из нулей и единиц с помощью слов из H.

Задача 3. Найдите количество проективных подпространств размерности k в проективном пространстве размерности n над полем из q элементов.

Задача 4. Пусть $k = 0, 1, \ldots, 5$. В $\mathbb{CP}^2$ даны k точек и $5-k$ прямых в общем положении (то есть никакие три точки не лежат на одной прямой, никакие две прямые не пересекаются в одной точке, и ни одна из данных прямых не содержит ни одной из данных точек). Сколько коник проходит через все данные точки и одновременно касается всех данных прямых?

Задача 5. Что является инвариантом четвёрки попарно непересекающихся векторных подпространств размерности n в $\mathbb{C}^{2n}$ относительно линейных преобразований? (Например, при $n = 1$ речь идёт о четвёрке векторных прямых в $\mathbb{C}^2$, а её инвариантом является двойное отношение соответствующих четырёх точек на проективной прямой $\mathbb{CP}^1$.)

Задача 6 (Недезаргова плоскость). Приведите пример плоскости, которая удовлетворяет трём аксиомам проективной плоскости, но в которой неверна теорема Дезарга.

Задача 7 (Вращения). Напомним, что группа $SO_3(\mathbb{R})$ вращений трёхмерного пространства состоит из всех таких вещественных 3×3-матриц A, что $AA^t = I$ и $\det A = 1$. Индуцируем на $SO_3(\mathbb{R})$ топологию с помощью стандартной топологии на вещественном пространстве 3×3-матриц.

(а) Докажите гомеоморфизм топологических пространств: $SO_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{RP}^3$.

(б) Приведите пример петли в $SO_3(\mathbb{R})$, которую нельзя стянуть в точку. Покажите, что если пройти по этой петле дважды, то полученная петля уже стянется в точку.

Задача 8 (Кватернионы). Определим специальную унитарную группу $SU_2(\mathbb{C})$ как группу всех таких комплексных 2×2-матриц A, что $A\overline{A}^t = I$ и $\det A = 1$. Индуцируем на $SU_2(\mathbb{C})$ топологию с помощью стандартной топологии на комплексном пространстве 2×2-матриц.

(а) Докажите, что $SU_2(\mathbb{C})$ изоморфна группе кватернионов с единичной нормой, и что этот изоморфизм групп индуцирует гомеоморфизм топологических пространств $SU_2(\mathbb{C}) \simeq S^3$.

(б) Постройте сюръективный гомоморфизм $SU_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{R})$ и покажите, что с топологической точки зрения этот гомоморфизм задаёт двулистное накрытие.