Геометрия и алгебра, весенний семестр 2019 г.

Семинар 19.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Определение 1. Архимедовой плоскостью Гильберта *назовём плоскость, удовлетворяющую аксиомам Гильберта* $I-III$, V_1 *(то есть, всем аксиомам первых трёх групп и аксиоме Архимеда).*

Плоскость Гильберта назовём евклидовой, *если она дополнительно удовлетворяет аксиомам IV-V.*

Гиперболической плоскостью *или* плоскостью Лобачевского *назовём плоскость Гильберта, которая дополнительно удовлеторяет следующей аксиоме:*

(L) *Для любой прямой* l *и любой точки* A, *не лежащей на этой прямой, существуют такие два луча* AB *и* AC, *не лежащие на одной прямой, и не пересекающие* l, *что любой луч* AE *внутри угла* BAC *пересекает* l.

Мы не накладываем аксиомы V_{1-2} *на гиперболическую плоскость, но их можно использовать в задачах, если это упрощает решение.*

Задача 1. Пусть на архимедовой плоскости Гильберта теорема Пифагора верна для всех прямоугольных треугольников. Докажите, что сумма углов каждого треугольника на этой плоскости равна $180°$.

Задача 2. Пусть на архимедовой плоскости Гильберта сумма углов каждого треугольника строго меньше $180°$.

(а) Докажите, что на стороне любого острого угла можно выбрать точку так, чтобы восставленный в ней перпендикуляр был параллелен другой стороне угла.

(б) Докажите, что найдутся такие три точки, что они не лежат ни на одной прямой и ни на одной окружности.

Задача 3. Треугольники ABC и ABD на плоскости Гильберта имеют общую сторону AB, и лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что они имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда прямая, соединяющая середины сторон AC и BC, совпадает с прямой, соединяющей середины сторон AD и BD.

Задача 4 (Признак равенства треугольников по трём углам)**.** Докажите или опровергните следующее утверждение. Если три угла одного треугольника на гиперболической плоскости равны трём углам другого треугольника, то треугольники конгруэнтны.

Задача 5. Приведите пример неархимедовой плоскости Гильберта (то есть, плоскости Гильберта, в которой неверна аксиома Архимеда V_1).

Задача 6. Докажите, что на архимедовой плоскости Гильберта сумма углов любого треугольника не может превышать $180°$.

Задача 7. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ — подполе поля вещественных чисел. Определим длину AB отрезка с концами $A = (x, y)$, $B = (x', y')$ в $\mathbb{F}^2$ формулой:

$$|AB| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Скажем, что два отрезка конгруэнтны, если их длины равны.

(а) Выполняются ли аксиомы конгруэнтности в $\mathbb{Q}^2$?

(б) Найдите минимальное (по включению) подполе $\mathbb{F}$, такое что в $\mathbb{F}^2$ выполняются аксиомы конгруэнтности. Это поле называется *полем Гильберта.*

(в*) Докажите, что поле Гильберта не содержит число $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Аксиомы Евклида–Гильберта

В системе Гильберта аксиом евклидовой плоскости, основные и неопределяемые объекты — это точки и прямые. Между объектами есть отношения, смысл которых раскрывается в аксиомах. Примеры отношений: принадлежать, лежать между, конгруэнтный. Аксиомы разбиты на пять групп.

Аксиомы принадлежности:

- I_1 Для любых двух точек существует прямая, принадлежащая каждой из этих двух точек.
- I_2 Для любых двух точек существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из этих двух точек.
- I_3 На любой прямой существует по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

Аксиомы порядка:

- II_1 Если точка B прямой лежит между точками A и C той же прямой, то A, B и C — различные точки прямой, причем B лежит также и между C и A.
- II_2 Для любых двух точек A и C на определяемой ими прямой существует по крайней мере одна точка B такая, что C лежит между A и B.
- II_3 Среди любых трёх точек прямой, существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.
- II_4 Пусть A, B, C — три не лежащие на одной прямой точки и a прямая, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через точку отрезка AB, то она непременно проходит через точку отрезка AC или точку отрезка BC.

Отношение конгруэнтности (или равенства) будет обозначаться символом $\equiv$.

Аксиомы конгруэнтности:

- III_1 На данной прямой от данной точки по данную сторону от неё можно отложить отрезок, конгруэнтный данному.
- III_2 Два отрезка, конгруэнтные третьему, конгруэнтны друг другу.
- III_3 Пусть AB и BC — два отрезка прямой, не имеющие общих точек, а $A'B'$ и $B'C'$ — два отрезка второй (или той же самой) прямой, также не имеющие общих точек. Если $AB \equiv A'B'$ и $BC = B'C'$, то отрезок AC конгруэнтен отрезку $A'C'$
- III_4 От данного луча в данную полуплоскость можно отложить единственный угол равный данному.
- III_5 Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности

  $$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

  то имеет место также конгруэнтность $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Аксиома о параллельных:

- IV_1 Через данную точку, не лежащую на данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Аксиомы непрерывности:

- V_1 Для любых двух отрезков AB и CD на прямой AB существует конечное число точек $A_1,\ldots, A_n$, таких что отрезки AA_1, $A_1A_2,\ldots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD, и при этом точка B лежит между точками A_{n-1} и A_n.
- V_2 Точки прямой нельзя дополнить новыми точками, так чтобы продолжали выполняться аксиомы I_{1-2}, II, III_1, V_1.