

Семинар 20.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Докажите, что площадь любого треугольника на гиперболической плоскости ограничена сверху некоторой универсальной мировой константой.

**Задача 2.** В модели Клейна гиперболической плоскости поделите данный отрезок пополам одной линейкой.

**Задача 3.** В модели Пуанкаре в верхней полуплоскости покажите, что все точки на евклидовом луче  $\{y = kx, x > 0\}$  равноудалены от гиперболической прямой  $\{(0, y) \mid y > 0\}$ .

**Задача 4.** В той же модели рассмотрим гиперболическое отражение относительно гиперболической прямой  $\{x^2 + y^2 = R^2, y > 0\}$  и гиперболический поворот вокруг точки  $i$  на  $\frac{\pi}{2}$ . Напишите явные формулы для этих преобразований, используя комплексную переменную  $z$  и/или  $\bar{z}$ .

**Задача 5** (Формула Лобачевского). Точка  $A$  находится на расстоянии  $d$  от прямой  $l$ . Найдите угол параллельности  $\Pi(d)$  (то есть угол между перпендикуляром, опущенным из  $A$  на  $l$  и одним из предельных лучей из  $A$  к  $l$ ) как функцию от  $d$ .

**Задача 6.** Докажите, что средняя линия треугольника на плоскости Лобачевского меньше половины основания.

**Задача 7.** Докажите, что у любой пары прямых на плоскости Лобачевского есть ось симметрии.

**Задача 8.** Докажите, что для каждой пары различных прямых  $l_1$  и  $l_2$  на гиперболической плоскости верно ровно одно утверждение из списка:

- $l_1$  и  $l_2$  пересекаются;
- у  $l_1$  и  $l_2$  есть общий перпендикуляр;
- $l_1$  и  $l_2$  не пересекаются, и для каждого  $\varepsilon > 0$  найдутся точка на  $l_1$  и точка на  $l_2$  на расстоянии меньше  $\varepsilon$  друг от друга.

**Задача 9** (Гиперболическая теорема Шаля). Классифицируйте все движения плоскости Лобачевского.

**Задача 10** (Мозаики Эшера). Найдите все гиперболические треугольники, которыми можно замостить плоскость Лобачевского.

**Задача 11.** Докажите признак равенства треугольников по двум углам и стороне, лежащей против одного из них.