Решения задач экзамена, вариант I

Геометрия и алгебра, весенний семестр 2018 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Являются ли линейно зависимыми векторы

$$3 - 3\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}+1} \ ?$$

Задача 2. Найдите расстояние между гиперплоскостью Π и точкой a в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$, если

$$\Pi = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0\};$$
$$a = (1, -2, 5, 8).$$

Решение: Все *векторы* v, лежащие в плоскости Π удовлетворяют уравнению:

$$(v, n) = 0,$$

где n — вектор с координатами $(1, 0, 1, 1)$. Действительно, все *точки* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Pi$ по определению удовлетворяют *неоднородному* уравнению: $x_1 + x_3 + x_4 = 2$. Следовательно, *вектор* с началом в точке $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Pi$ и концом в точке $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \Pi$ удовлетворяет *однородному* уравнению:

$$1 \cdot (y_1 - x_1) + 0 \cdot (y_2 - x_2) + 1 \cdot (y_3 - x_3) + 1 \cdot (y_4 - x_4) = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что вектор n ортогонален плоскости Π.

Расстояние от точки a до плоскости Π равно длине ортогональной проекции на n *вектора* u с концом в точке a и началом в *произвольной* точке $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Pi$. Из рассмотрения прямоугольного треугольника с гипотенузой u, и катетом направленным вдоль n, находим формулу для длины такой проекции:

$$\frac{|(n, u)|}{||n||}.$$

Заметим, что этот треугольник живёт в двумерной плоскости, натянутой на векторы u и n, поэтому для работы с ним вполне достаточно школьной планиметрии и понимания связи между скалярным произведением векторов и косинусом угла между ними (а главное не нужно пытаться представить себе нечто многомерное). Вычисляем

$$\frac{|(n, u)|}{||n||} = \frac{|1 \cdot (1 - x_1) + 0 \cdot (-2 - x_2) + 1 \cdot (5 - x_3) + 1 \cdot (8 - x_4)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}.$$

Поскольку точка (x_1, x_2, x_3, x_4) лежит в плоскости Π, мы знаем, что $x_1 + x_3 + x_4 = 2$. Отсюда получаем ответ:

$$\frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 8 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 4\sqrt{3}.$$

Заметим, что аналогичные рассуждения доказывают такую общую формулу для расстояния $d(a, \Pi)$ от точки $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ до гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, заданной уравнением $b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n + b_0 = 0$:

$$d(a, \Pi) = \frac{|b_1 a_1 + \ldots + b_n a_n + b_0|}{\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}}.$$

При $n = 3$ эта формула совпадает с известной формулой из школьной стереометрии.

Задача 3. Вычислите A^{2021}, где

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы размера $n \times n$, все коэффициенты которой равны -1.

Решение: Все строки матрицы равны другу другу, поэтому её ранг равен 1. Следовательно, её ядро имеет размерность $n-1$. Все векторы из ядра являются собственными с собственным значением 0. В частности, имеется набор из $(n-1)$ собственных векторов с собственным значением 0.

Теперь есть два варианта: либо все собственные значения равны 0 (тогда матрица нильпотентна), либо есть одно ненулевое собственное значение кратности один (а в этом случае собственное значение 0 является корнем характеристического многочлена кратности $n-1$). Первый вариант не имеет места, так как $A^2 = -nA$, а следовательно A не может быть нильпотентной. Например, это можно доказать по индукции: $A^2 = -nA \neq 0$, $A^3 = -nA^2 \neq 0$ и т.д.

Заметим, что попутно мы нашли минимальный многочлен матрицы A, а именно многочлен $m(x) := x^2 + nx$. Действительно, $m(A) = A^2 + nA = 0$, но при этом никакой линейный многочлен не аннулирует матрицу A. Следовательно, m имеет минимальную степень среди всех ненулевых многочленов, аннулирующих A.

Поскольку все собственные значения являются корнями минимального многочлена, то ненулевое собственное значение матрицы A равно n. Следовательно, характеристический многочлен матрицы A равен $x^{n-1}(x-n)$.

Заметим, что при таких рассуждениях не надо считать никаких определителей. Мы обошлись более простыми вычислениями: нашли ранг матрицы A и нашли A^2.

Задача 5. Найдите прообраз точки 1 при дробно-линейном преобразовании рациональной проективной прямой, переводящем точки 2, $\frac{4}{3}$, 1, соответственно, в точки $-\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{4}$.

Задача 6. Найдите сигнатуру квадратичной формы q на $\mathbb{R}^4$, заданной формулой:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} 4x_i x_j.$$

Задача 7. Найдите проективное преобразование вещественной проективной плоскости, которое сохраняет конику $\{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ и переводит точку $(1:1:3)$ в точку $(0:0:1)$.

Решение: В переводе на язык линейной алгебры нам достаточно найти какой-нибудь линейный оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такой, что:

(1) T переводит прямую $l_1 := \langle(1,1,3)\rangle$ в прямую $l_2 := \langle(0,0,1)\rangle$;

(2) T сохраняет квадратичную форму $q(x_0, x_1, x_2) := x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$.

Заметим, что *евклидовыми* движениями нам не обойтись — при любых евклидовых движениях прямая l_2 обязана переходить в себя, потому что является осью вращения конуса $\{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}$. Однако небольшую выгоду мы можем извлечь и из евклидовых движений: рассмотрим поворот относительно вектора $(0,0,1)$ на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке. Такой поворот сохраняет конус и прямую l_2, а прямую l_1 переводит в прямую $l_1' = (\sqrt{2}, 0, 3)$.

Тем самым мы немного упростили задачу — нам осталось найти преобразование T', которое сохраняет конус и переводит прямую l_1' в прямую l_2, причём обе прямые лежат в плоскости $\Pi := \{x_1 = 0\}$. Так что мы можем потребовать, чтобы T' сохранял плоскость Π. Тогда T' обязан сохранять и ортогональное дополнение к этой плоскости относительно поляризации формы q, то есть ось x_1. Таким образом, можно искать T' как *гиперболическое* движение с неподвижной прямой, то есть гиперболический поворот. Теперь мы уже существенно упростили задачу, превратив её из трёхмерной в двумерную.

Осталось найти ограничение оператора T' на плоскость Π. В координатах (x_0, x_2) оператор $T'' = T'|_\Pi$ должен удовлетворять таким условиям:

(1) T'' переводит прямую $\langle(\sqrt{2}, 3)\rangle$ в прямую $\langle(0,1)\rangle$;
(2) T'' сохраняет квадратичную форму $x_0^2 - x_2^2$.

Второе условие заведомо выполнено, если $\det T'' = 1$, и T'' сохраняет прямую $\{x_0 = x_2\}$ и прямую $\{x_0 = -x_2\}$, то есть имеет собственные векторы $(1,1)$ и $(1,-1)$. Обозначим через λ и μ соответствующие им собственные значения (естественно, $\lambda\mu = 1$). Тогда матрица оператора T'' имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda+\mu}{2} & \frac{\lambda-\mu}{2} \\ \frac{\lambda-\mu}{2} & \frac{\lambda+\mu}{2} \end{pmatrix}$$

Осталось найти такие λ и $\mu = \lambda^{-1}$, чтобы выполнялось первое условие, то есть

$$\sqrt{2}\frac{\lambda+\mu}{2} + 3\frac{\lambda-\mu}{2} = 0.$$

Отсюда $\lambda = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ и $\mu = \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. Тогда матрицы операторов T'' и T' имеют вид:

$$T'' = \frac{\sqrt{7}}{7}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}; \quad T' = \frac{\sqrt{7}}{7}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{7} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку оператор aT' для всех ненулевых $a \in \mathbb{R}$ также удовлетворяет условиям (задача проективная), можно упростить ответ, взяв вместо T' оператор $\sqrt{7}T'$. Тогда в качестве оператора T можно взять композицию:

$$T = \sqrt{7}T' \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -\sqrt{7} & \sqrt{7} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(здесь мы для удобства матрицу евклидова поворота на угол $\frac{\pi}{4}$ умножили на $\sqrt{2}$, снова воспользовавшись проективностью).

Задача 8. Сколько элементов в факторгруппе $\mathbb{Z}^3/H$, где $H \subset \mathbb{Z}^3$ — подгруппа, порождённая векторами $(2,2,0)$, $(3,0,3)$ и $(0,3,3)$?

Решение: Задача эквивалентна приведению матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

к ступенчатой форме с использованием только *обратимых* над $\mathbb{Z}$ преобразований строк. Таким образом, разрешается заменять строку R_i на $R_i + aR_j$ для всех $a \in \mathbb{Z}$ (обратное преобразование — замена строки R_i на $R_i - aR_j$), умножать строку на ± 1 (остальные целые числа не имеют обратных по умножению) и переставлять строки.

Заметим, что этих действий вполне достаточно для реализации алгоритма Евклида по поиску наибольшего общего делителя всех элементов в данном столбце. Руководствуясь логикой алгоритма Евклида, проделаем такую серию преобразований:

$R_2 \mapsto R_2 - R_1; \quad R_1 \mapsto R_1 - 2R_2; \quad R_1 \leftrightarrow R_2; \quad R_2 \mapsto R_2 - 2R_3; \quad R_2 \leftrightarrow R_3; \quad R_3 \mapsto -R_3.$

Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что в H есть другая система образующих: векторы $(1,-2,3)$, $(0,3,-3)$, $(0,0,12)$. Теперь мы можем выбрать и более удобную для решения задачи систему образующих в $\mathbb{Z}^3$: векторы $(1,-2,3)$, $(0,1,-1)$, $(0,0,1)$. В новых образующих задача сводится к следующей задаче: сколько элементов в факторгруппе $\mathbb{Z}^3/H'$, где $H' \subset \mathbb{Z}^3$ — подгруппа, порождённая векторами $(1,0,0)$, $(0,3,0)$ и $(0,0,12)$? Ответ 36, поскольку каждый вектор $v \in \mathbb{Z}^3$ эквивалентен по модулю H' *единственному* вектору вида $(0,x,y)$, где $0 \le x < 3$, $0 \le y < 12$.

Заметим, что попутно мы доказали изоморфизм $\mathbb{Z}^3/H \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.