Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 3. Векторные пространства

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Лебедь, рак и щука тянут воз вдоль векторов $(1,-1,2)$, $(-2,1,-1)$ и $(1,1,-4)$, соответственно. Чему должны быть равны приложенные силы по абсолютной величине, чтобы воз был и ныне там?

Задача 2. В векторном пространстве даны несколько линейно зависимых векторов. Докажите, что один из этих векторов представляется в виде линейной комбинации остальных векторов.

Задача 3. Обозначим через $0_{\mathbb{F}}$ нулевой элемент поля $\mathbb{F}$, а через 0_V нулевой вектор векторного пространства V над полем $\mathbb{F}$. Выведите из аксиом векторного пространства, что $0_{\mathbb{F}} \cdot v = 0_V$ для всех векторов $v \in V$.

Задача 4. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0,1]$.

(а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?

(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$.

Задача 5. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

(а) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt{2}$, $1/(\sqrt{2}-1)$?

(б) Выразите вектор $(1+\sqrt{2})/(3-2\sqrt{2})$ как линейную комбинацию векторов 1 и $\sqrt{2}$.

(в) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt[3]{2}$, $1/(\sqrt[3]{2}-1)$?

(г) Можно ли выразить вектор $1/(\sqrt[3]{2}-1)$ как линейную комбинацию векторов 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$?

Задача 6. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как вещественное векторное пространство.

(а) Представьте вектор x^3 как линейную комбинацию векторов 1, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$.

(б) Являются ли векторы 1, $(x-1)^2$, $(x-2)^3$, x^3 линейно зависимыми?

Задача 7 (Тривиум 09.09.2019)**.** Найдите такие вещественные числа a, b, c и d, что справедливо тождество

$$\frac{x^3+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x-3}.$$

Задача 8. В координатном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x,y,z) найдите матрицу поворота:

(а) на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x=y=z\}$;

(б) на угол φ относительно прямой $\{x=y=z\}$;

(в) на угол φ относительно прямой $\{x=py=qz\}$, где $p,q \neq 0$.