Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 4. Метод Гаусса

факультет математики, НИУ ВШЭ

Если не оговорено обратное, то все векторные пространства и уравнения рассматриваются над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Задача 1. (а) Найдите все решения уравнения $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$.

(б) Найдите все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 4y + z = 3 \end{cases}.$$

Определение 1. *Назовём ступенчатую матрицу стандартной, если*

(1) *каждая ненулевая строка начинается с 1 (ведущая единица),*

(2) *в столбце, содержащем ведущую единицу, нет других ненулевых элементов.*

Задача 2. (а) Приведите матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

к стандартному ступенчатому виду.

(б) Решите систему уравнений:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(в) Найдите линейную зависимость между векторами $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 6)$, $v_3 = (3, 6, 11)$, $v_4 = (4, 9, 8)$ в $\mathbb{R}^3$.

(г) Выразите каждый из векторов v_1, v_2, v_3, v_4 как линейную комбинацию остальных трёх векторов.

Задача 3. В десяти копилках лежат 1, 2, 3,..., 10 монет. Разрешается добавлять по монете во все копилки, кроме одной. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз, получить во всех копилках одинаковое количество монет?

Задача 4. На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

Задача 5. Клетки прямоугольной таблицы заполнены числами так, что каждое число является средним арифметическим чисел в четырёх соседних клетках (соседние=имеющие общую сторону). Можно ли восстановить числа во внутренних клетках таблицы по числам в граничных клетках?

Задача 6. (а) В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров в каждом, так что суммарный вес коров первого стада равен суммарному весу коров другого стада. Известно, что каждая корова весит целое число килограммов. Докажите, что все коровы весят одинаково.

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если убрать условие, что вес коровы — целое число?

Задача 7. Сколько существует стандартных ступенчатых матриц размера 2×3, все элементы которых равны 0 или 1?

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Домашнее задание 3. Срок сдачи 30 сентября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите линейную зависимость между векторами $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 6, 11)$ и $(2, 5, 8)$ в $\mathbb{R}^3$.

Задача 2. Докажите, что если два вектора линейно зависимы, то один из них равен другому, умноженному на скаляр.

Задача 3. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как вещественное векторное пространство. Представьте вектор x^4-4x^3+3 как линейную комбинацию векторов $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^4$.

Задача 4. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Являются ли векторы 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ линейно зависимыми?

Задача 5. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем из двух элементов, а $v \in V$ — ненулевой вектор. Найдите количество таких векторов $u \in V$, что u и v линейно независимы.