Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 5. Базисы

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Никон выбрал два неколлинеарных вектора e_1 и e_2 на вещественной плоскости и сопоставил каждому вектору v пару Н-координат (x_1, x_2) так, что $v = x_1e_1 + x_2e_2$. Родион выбрал два других неколлинеарных вектора f_1 и f_2 и сопоставил вектору v пару Р-координат (y_1, y_2) так, что $v = y_1f_1 + y_2f_2$. Известно, что векторы с Н-координатами $(1, 2)$ и $(3, 4)$ имеют Р-координаты $(1, 4)$ и $(2, 3)$, соответственно. Найдите Р-координаты вектора, имеющего Н-координаты $(5, 8)$.

Задача 2. Постройте базис в векторном пространстве V, где V — это

(а) пространство $m \times n$ матриц с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$;

(б) пространство многочленов с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$ степени не выше n;

(в) поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$;

(г) поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Задача 3. Пусть $U = \langle(1, 1, 1), (2, 3, 4)\rangle \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость. Найдите размерности пересечения $U \cap V$ и суммы $U + V$ для следующих подпространств $V \subset \mathbb{R}^3$:

(а) $\langle(3, 5, 7)\rangle$; (б) $\langle(3, 5, 8)\rangle$; (в) $\langle(3, 5, 8), (13, 21, 34)\rangle$; (г) $\langle(3, 5, 7), (13, 21, 29)\rangle$.

Задача 4. (а) Докажите, что для каждой пары подпространств U и V в векторном пространстве выполнено тождество, аналогичное формуле включений-исключений для множеств:

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

(б) Верно ли аналогичное тождество для трёх подпространств U, V, W?

Задача 5. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ минимальное по включению подполе в $\mathbb{C}$, содержащее α. Будет ли $\mathbb{Q}(\alpha)$ векторным пространством (а) над $\mathbb{Q}$? (б) над $\mathbb{C}$?

Найдите базис в $\mathbb{Q}(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$ для (в) $\alpha = i$; (г) $\alpha = \sqrt[3]{2}$.

Задача 6. Докажите, что набор векторов $e_1, \ldots, e_n$ в векторном пространстве V образует базис тогда и только тогда, когда для каждого вектора $v \in V$ существует единственное разложение $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — скаляры.

Задача 7. (а) Сколько векторов в координатном векторном пространстве $\mathbb{F}_2^4$ над полем из двух элементов?

(б) Сколько прямых (=одномерных подпространств) в $\mathbb{F}_2^4$?

(в) Пусть $U \subset \mathbb{F}_2^4$ — плоскость (=двумерное подпространство) в $\mathbb{F}_2^4$. Найдите количество таких плоскостей $V \subset \mathbb{F}_2^4$, что $U \cap V = \{0\}$.

Задача 8 (Лемма Штейница)**.** В векторном пространстве даны линейно независимый набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ и порождающий набор векторов $w_1, \ldots, w_m$. Докажите, что $n \leq m$, и векторы $w_1, \ldots, w_m$ можно так перенумеровать, что $v_1, \ldots, v_n, w_{n+1}, \ldots, w_m$ тоже будет порождающим набором.

Задача 9 (Формула Тейлора)**.** Для каждого $a \in \mathbb{R}$ постройте такой базис $e_0, e_1, \ldots, e_n$ в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, чтобы каждый многочлен f в этом базисе представлялся в виде $f = f(a)e_0 + f'(a)e_1 + \ldots + f^{(n)}(a)e_n$.