Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

# Семинар 1. Школьная геометрия с видом на линейную алгебру

факультет математики, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Школьник нарисовал сначала векторы $u$ и $v$, а потом векторы $u+2v$, $\frac{1}{2}(u+v)$, $u-v$ и $2u+v$. В результате получились векторы с координатами $(-1,1)$, $(-1,5)$, $(0,2)$, $(1,3)$, $(1,7)$, $(2,2)$.[1] Какие два вектора школьник нарисовал первыми?

**Задача 2.** Через $O$ обозначим начало координат на вещественной координатной плоскости $\mathbb{R}^2$. Известно, что точка $X$ лежит на отрезке $AB$ и делит его в отношении $4:1$. Найдите такие вещественные числа $\lambda$ и $\mu$, что выполнено равенство векторов:

$$\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}.$$

**Задача 3.** Найдите площадь параллелограмма в $\mathbb{R}^2$, натянутого на векторы $(5,8)$ и $(8,13)$[2].

**Задача 4.** Найдите расстояние от точки $(10,11)$ в $\mathbb{R}^2$ до прямой, проходящей через начало координат и содержащей вектор $(2,1)$.

**Задача 5.** (а) Найдите угол между векторами $(1,2)$ и $(1,1)$ в $\mathbb{R}^2$.

(б) Найдите угол между векторами $(1,2,3)$ и $(1,1,1)$ в $\mathbb{R}^3$.

**Задача 6.** Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, натянутая на векторы $(1,2,3)$ и $(1,1,1)$.

(а) Найдите вектор единичной длины, перпендикулярный плоскости $\Pi$.

(б) Найдите расстояние от точки $(3,4,6) \in \mathbb{R}^3$ до плоскости $\Pi$.

**Задача 7.** Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $(3,4,6)$, $(1,2,3)$ и $(1,1,1)$ в $\mathbb{R}^3$.

**Задача 8.** (а) На лекции мы определили косинус угла $\varphi$ между векторами $u = (x_1,y_1)$ и $v = (x_2,y_2)$ в $\mathbb{R}^2$ следующей формулой:

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{|u||v|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Также мы определили ориентированную площадь $\omega(u,v)$ параллелограмма, натянутого на векторы $u$ и $v$ формулой:

$$\omega(u,v) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Выполняется ли при таких определениях следующая формула для площади из школьной геометрии:

$$|\omega(u,v)| = |u||v||\sin\varphi|?$$

(б) Докажите неравенство Коши–Буняковского–Шварца в $\mathbb{R}^2$:

$$|(u,v)| \leq |u||v|.$$

**Задача 9.** Одинаковые шары в $\mathbb{R}^4$ расположены так, что их центры являются вершинами 4-мерного куба, причём сторона куба равна диаметру шара. Докажите, что между этими шарами можно разместить ещё один шар того же размера, так что он будет касаться всех остальных шаров.

**Задача 10.** Докажите, что у 100-мерного апельсина радиусом 6см с толщиной кожуры 3мм съедобная часть составляет меньше одного процента объема.

---

[1] Векторы перечислены в лексикографическом, а не хронологическом порядке.

[2] Числа 5, 8, 13 — это три последовательных числа Фибоначчи.

# Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

## Домашнее задание 1. Срок сдачи 16 сентября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

**Задача 1.** Вычислите
$$\frac{(1+i\sqrt{3})^{2018}}{(1+i)^{4024}}.$$

**Задача 2.** Нарисуйте на плоскости множество точек $z$, удовлетворяющих уравнению
$$|z-1| = 2|z+1|.$$

**Задача 3.** Докажите, что всякое комплексное число является квадратом некоторого комплексного числа.

**Задача 4.** Найдите в радикалах все комплексные решения уравнения
$$x^5 - 1 = 0.$$
Формула для решений может использовать только арифметические операции и извлечение корней (никаких тригонометрических функций).

**Задача 5.** Умножение на комплексное число $z$ задаёт преобразование плоскости
$$M_z : w \mapsto z \cdot w.$$
Представьте $M_{1+i}$ в виде композиции поворота и гомотетии.