

Семинар 2. Комплексные числа и геометрия

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Вычислите (то есть представьте в виде $a + bi$ для вещественных a и b):

(а) $(1 + i)^8$; (б) $\frac{1}{3+4i}$.

Задача 2. Нарисуйте на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

(а) $\operatorname{Re} z = 1$; (б) $|z| = 3$; (в) $\operatorname{Re} z \geq 1, \operatorname{Im} z \geq 2, |z| \leq 3$.

Задача 3. Для комплексного числа z определим преобразование плоскости M_z таким образом: каждая точка w переходит в точку $z \cdot w$.

(а) Во сколько раз преобразование M_z для $z = 1 - \sqrt{3}i$ увеличивает расстояния на комплексной плоскости?

(б) Докажите, что M_z при $z \neq 0$ является преобразованием подобия, то есть увеличивает все расстояния в одинаковое число раз.

(в) Пусть $|z| = 1$. Докажите, что в этом случае преобразование M_z является поворотом. На какой угол?

Задача 4. (а) Проверьте, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

(б) Выведите из пункта (а) формулу для $\cos(\varphi + \psi)$ и $\sin(\varphi + \psi)$.

Задача 5 (Формула Муавра). Выпишите формулу для комплексных корней степени n из единицы, используя тригонометрическую форму комплексного числа. Получите явную формулу (в радикалах), когда $n = 3, 4, 5$.

Задача 6. Докажите, что в произвольном поле выполнено тождество:

$$(-1)(-1) = 1.$$

Задача 7. Найдите матрицы следующих линейных отображений на координатной плоскости с координатами x и y :

(а) отражение относительно прямой $\{x = y\}$,

(б) поворот на $\frac{\pi}{4}$ относительно начала координат,

(в) гомотетия с коэффициентом 10 относительно начала координат,

(г) проекция на ось x вдоль оси y .

Задача 8. Напомним, что линейному отображению

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

координатной плоскости в себя мы ставили в соответствие матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что умножение матриц соответствует композиции отображений.

Задача 9. Определим *кватернионы* \mathbb{H} как алгебру линейных отображений координатной плоскости \mathbb{C}^2 в себя, заданных матрицами вида

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Докажите, что в \mathbb{H} выполняются все аксиомы поля, кроме коммутативности умножения.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2019 г.

Домашнее задание 2. Срок сдачи 23 сентября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{12}.$$

Задача 2. Существует ли плоская фигура, имеющая ровно две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

Задача 3. Найдите матрицу отражения относительно прямой $\{y = 2x\}$ на координатной плоскости \mathbb{R}^2 .

Задача 4. Из центра правильного 25-угольника проведены векторы во все его вершины. Как надо выбрать несколько векторов из этих 25, чтобы их сумма имела наибольшую длину?

Задача 5. Найдите все линейные отображения координатной плоскости в себя, которые переводят прямую $\{y = x\}$ в прямую $\{y = 3x\}$.