

**Листок 1. Комплексные числа и геометрия**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника.

**Задача 2.** Можно ли ввести на комплексных числах отношение порядка  $>$ , согласованное со сложением и умножением? (Последнее означает, что для всех  $a, b, c \in \mathbb{C}$  (1) из  $a > b$  следует  $a + c > b + c$ ; (2) из  $a > 0$  и  $b > 0$  следует, что  $ab > 0$ .)

**Задача 3.** а) Докажите, что существует многочлен  $T_n$ , такой что  $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$  (он называется *многочленом Чебышёва первого рода*).

б) Докажите, что существует многочлен  $U_n$ , такой что  $\sin(nx) = \sin(x)U_{n-1}(\cos(x))$  (он называется *многочленом Чебышёва второго рода*).

**Задача 4.** (а) Докажите, что угол между прямыми, пересекающимися в точке  $z_0$  и проходящими через точки  $z_1$  и  $z_2$ , равен аргументу отношения  $V(z_2, z_1, z_0) := \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ .

(б) Докажите, что четыре точки  $z_0, z_1, z_2$  и  $z_3$  лежат на одной окружности (или прямой) тогда и только когда их *двойное отношение*

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}$$

является вещественным числом.

**Задача 5.** (а) На комплексной прямой в точках  $z_1, \dots, z_n$  находятся  $n$  планет одинаковой массы. Докажите, что точки  $z$ , в которых силы тяготения этих планет уравновешиваются, являются корнями уравнения  $\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n} = 0$ . Напомним, что на плоскости сила тяготения убывает пропорционально расстоянию.

(б) (Проблема Максвелла) Доказать, что у системы планет из пункта (а) не более  $n - 1$  точки равновесия, причем оценка  $n - 1$  точная. Замечание: аналогичный вопрос для трехмерного пространства – известная открытая проблема.

(в) (Теорема Гаусса–Лукаса) Корни производной комплексного многочлена  $f(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n)$  лежат в выпуклой оболочке  $z_1, \dots, z_n$ . Напомним, что выпуклая оболочка – наименьший многоугольник, содержащий  $z_1, \dots, z_n$ .

**Задача 6.** Сформулируйте и докажите трёхмерный аналог теоремы Шала.

**Задача 7.** Будем рассматривать трёхмерное пространство  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$  как часть четырёхмерного пространства  $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ , состоящую из точек с координатами  $(x, y, z, 0)$ .

(а) Как нужно повернуть этот листок в  $\mathbb{R}^4$ , чтобы шрифт изменился на зеркальный?

(б) Докажите, что левый ботинок из  $\mathbb{R}^3$  можно так повернуть в  $\mathbb{R}^4$ , что после возвращения в  $\mathbb{R}^3$  он станет правым ботинком.

(в) Докажите, что два зацепленных звена цепи в  $\mathbb{R}^3$  можно так подвигать в  $\mathbb{R}^4$ , что после возвращения в  $\mathbb{R}^3$  они окажутся незацепленными.