Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Задачи для подготовки к контрольной.

факультет математики, НИУ ВШЭ

1. Алгоритм Евклида

Задача 1. Птицефабрика фасует яйца в коробки, рассчитанные либо на дюжину яиц, либо на 25 яиц. Сможет ли птицефабрика отсчитать покупателю ровно 399 яиц, используя только такие коробки? Предполагается, что в каждой коробке лежит ровно столько яиц, на сколько она рассчитана.

Задача 2. Найдите все решения в целых числах диофантова уравнения

$$16x + 27y = 625.$$

Задача 3. Найдите наибольший общий делитель многочленов $x^{32} - 1$ и $x^{12} - 1$.

Задача 4 (Китайская теорема об остатках)**.** Найдите все решения системы сравнений

$$x \equiv 5 \pmod 8, \quad x \equiv 2 \pmod 7, \quad x \equiv 4 \pmod{15}.$$

Задача 5. Найдите натуральное число x, не превосходящее 120, такое что

$$x \equiv 3 \pmod 8, \quad x \equiv 2 \pmod 5, \quad x \equiv 1 \pmod 3.$$

Задача 6. Найдите квадратный многочлен f с рациональными коэффициентами, такой что

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 10, \quad f(2) = 100.$$

Задача 7. Решите сравнение

$$100x \equiv 997 \pmod{1001}.$$

Задача 8. Решите уравнения в целых числах.

(а) $173x + 95y = 8$; (б) $57x + 102y = 4$; (в) $91x + 1001y = 5$.

Задача 9. Решите уравнения в натуральных числах.

(а) $173x + 95y = 1984$; (б) $57x + 102y = 2019$.

Задача 10. Найдите многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени не выше трёх, значения которого в точках 0, 1, 2 и 3 совпадают со значениями функции

$$\text{(а) } 2^x; \quad \text{(б) } \frac{1}{x+1}; \quad \text{(в) } \sin(\frac{\pi x}{2}).$$

Задача 11. Найдите такие многочлены f и g с рациональными коэффициентами, что

$$f(x)(x^3 - 2) + g(x)(2 + 3x + x^2) = 1,$$

и при этом степень f и g не больше 2.

Задача 12 (Избавление от иррациональности в знаменателе)**.** Найдите такие рациональные числа a, b и c, что

$$\frac{1}{(2 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}.$$

2. Комплексные числа и целые гауссовы числа

Задача 13. Представьте следующие комплексные числа в виде $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{(а)}\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}; \quad \text{(б)}\ \sqrt{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}; \quad \text{(в)}\ \sqrt{1+i\sqrt{3}}.$$

Задача 14. Найдите все комплексные решения уравнения

(а) $z^3+3z^2+3z+3=0$; (б) $z^4+4=0$; (в) $(z+i)^4=(z-i)^4$; (г) $z^4+(z-4)^4=32$.

Задача 15. Найдите сумму квадратов длин всех диагоналей в правильном семиугольнике, вписанном в единичную окружность (сторона не считается диагональю).

Задача 16. Постройте циркулем и линейкой правильный пятиугольник с данной стороной.

Задача 17 ($\star$)**.** Докажите, что число $\frac{2+i}{2-i}$ не является корнем n-ой степени из единицы ни для какого натурального n.

3. Кольца и поля

Задача 18. *Полем из трёх элементов* называется множество из трёх элементов (обозначим их через 0, 1 и 2) с операциями сложения и умножения, заданными следующими таблицами:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

,

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

.

Проверьте ассоциативность и дистрибутивность этих операций. Проверьте, что из каждого элемента можно вычесть любой другой элемент, и каждый элемент можно поделить на любой другой ненулевой элемент.

Задача 19. (а) Рассмотрим множество $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ остатков 0, 1, 2, 3, 4 при делении на 5. Введём на $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$a+b=(a+b) \pmod 5,$$
$$ab=ab \pmod 5,$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в $\mathbb{Z}$. Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 20. Пусть в поле $\mathbb{F}$ выполнено тождество $1+1=0$. Докажите или опровергните: уравнение $\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=a$ будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого нечётного натурального n. (Предупреждение: тождество $1+1=0$ выполнено не только в поле из двух элементов, поэтому разбор примера $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$ не является полным решением.)

Задача 21. Пусть в поле $\mathbb{F}$ тождество $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}=0$ не выполнено ни для какого натурального n. Докажите или опровергните: уравнение

$$\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=a$$

будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого натурального n.

Задача 22 (Единственность нуля)**.** Докажите, что в кольце не может быть двух различных нулевых элементов, то есть элементов 0, для которых выполнено тождество $0 + a = a$. Доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 23. Докажите, что в каждом кольце выполняются тождества:

$$\text{(а) } a \cdot 0 = 0; \quad \text{(б) } -a = (-1) \cdot a; \quad \text{(в) } (-a) \cdot b = (-ab).$$

Как и прежде, доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 24 (Делители нуля)**.** (а) Докажите, что если

$$ab = 0$$

для двух элементов a и b поля, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.

(б) Приведите пример кольца, в котором есть делители нуля, то есть, два ненулевых элемента a и b, таких что $ab = 0$.

4. Арифметика (числа и многочлены)

Задача 25. (а) Докажите, что число вида $4k + 3$ не представляется в виде суммы двух полных квадратов ни для какого натурального k.

(б) Докажите, что если целые числа m и n представляются в виде суммы двух полных квадратов, то их произведение mn тоже представляется в виде суммы двух полных квадратов (и даже двумя способами).

Задача 26. Для каких остатков a по модулю p сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

разрешимо в целых числах, если p равно

(а) 5, (б) 13, (в) 23?

Задача 27. Докажите, что если p — нечётное простое число, то сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

разрешимо в целых числах ровно для половины всех ненулевых остатков a по модулю p.

Задача 28. Докажите, что каждого простого числа p сравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \mod p$$

имеет нетривиальное решение в целых числах (*тривиальное решение* — это решение $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \mod p$).

Задача 29. Пусть p — простое число. Докажите, что сравнение $x^2 \equiv -1 \mod p$ не имеет решений в целых числах тогда и только тогда, когда $p \equiv 3 \mod 4$.

Задача 30. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 31. (а) Докажите, что если число $2^n - 1$ простое, то n обязательно является простым числом. (Простые числа вида $2^n - 1$ называются *простыми числами Мерсенна.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 32. (а) Докажите, что если число 2^n+1 простое, то n обязательно является степенью двойки, то есть, $n = 2^m$ для некоторого натурального m. (Простые числа вида $2^{2^m}+1$ называются *простыми числами Ферма.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 33. Пусть p — простое число.

(а) Докажите "тождество ленивого школьника":

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p.$$

(б) Докажите малую теорему Ферма: $n^p - n$ делится на p для любого натурального n.

(в) Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

Задача 34. Примените решето Эратосфена, чтобы найти все неприводимые многочлены степени не выше четырёх с коэффициентами в поле из двух элементов.

Задача 35. (а) Докажите для любого заданного поля $\mathbb{F}$, что существует бесконечно много неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1 и остальными коэффициентами из $\mathbb{F}$.

(б) Классифицируйте все неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. (Подсказка: используйте основную теорему алгебры.)

(в) Приведите пример неприводимого многочлена степени 5 над полем из двух элементов.

(г)* Докажите, что над полем из двух элементов существует неприводимый многочлен любой заданной степени.

Задача 36 ($\star$)**.** Придумайте эффективный алгоритм разложения многочлена над полем из двух элементов на неприводимые множители. (Определение понятия "эффективный" должно быть частью решения. Обычно эффективным называют алгоритм, количество шагов в котором полиномиально зависит от количества битов, необходимого для ввода начальных данных. Например, чтобы задать многочлен степени n над полем из двух элементов необходимо n битов, так как потребуется указать значения 0 или 1 для коэффициентов при степенях x^{n-1}, x^{n-2},$\ldots$, x и 1.)

Задача 37. Разложите на неприводимые множители в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен

$$x^4 + 4x^2 + x + 6.$$

Задача 38. (а) Найдите последние две цифры числа 2^{65537}.

(б) Найдите коэффициент при x и свободный член многочлена $(x+1)^{65537}$ в кольце многочленов $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$. (Через $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ обозначается поле вычетов по модулю 2, также известное под именем "поле из двух элементов". Через $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ обозначается кольцо многочленов с коэффициентами в поле из двух элементов.)

Задача 39. Существуют ли такие иррациональные $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что α^β рационально?

Задача 40 ($\star$)**.** Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ — различные простые числа. Докажите, что сравнение

$$p^x + q^y \equiv 1 \pmod{pq}$$

разрешимо в натуральных числах.

5. Матрицы и системы линейных уравнений

Если не оговорено обратное, то здесь и далее все векторные пространства и уравнения рассматриваются над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Задача 41. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}^n$$

для всех натуральных n.

Задача 42. Приведите к стандартному ступенчатому виду “таблицу умножения”, то есть, матрицу 10×10, у которой на (i, j)-том месте стоит ij.

Задача 43. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Задача 44. (а) Докажите, что если $m \times n$-матрица A получается из матрицы A' элементарными преобразованиями строк, то системы из m однородных линейных уравнений на n неизвестных $AX = 0$ и $A'X = 0$ эквивалентны (то есть имеют одно и то же множество решений).

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для систем неоднородных линейных уравнений.

Задача 45. Найдите линейную зависимость между строками матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 46. Докажите, что если $m\times n$-матрица A' получается из матрицы A заменой i-той строки на сумму i-той и j-той строки, то $A' = (I_m + E_m^{ij})A$, где I_m — единичная $m \times m$-матрица, а E_m^{ij} — матрица того же размера с единственным ненулевым элементом (равным 1) на (i, j)-том месте.

Задача 47. Найдите матрицу обратную относительно умножения к матрице

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 48. (а) При каком условии на коэффициенты 2×2-матрица имеет обратную?

(б) Тот же вопрос для 3×3-матрицы.

Задача 49. Пусть A — квадратная матрица. Докажите, что следующие три условия эквивалентны.

(1) Матрицу A можно перевести в единичную матрицу элементарными преобразованиями строк.

(2) Матрица A имеет обратную относительно умножения.

(3) Система линейных уравнений $AX = 0$ имеет только нулевое решение.

Задача 50. Вычислите ранг матрицы
$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}.$$

Задача 51. Пусть A и B — матрицы размера $m \times n$ и $n \times k$, соответственно. Докажите неравенство на ранги:
$$\mathrm{rk}\ AB \leq \min\{\mathrm{rk}\ A, \mathrm{rk}\ B\}.$$

Задача 52. Пусть A и B — квадратные матрицы. Докажите неравенство на ранги:
$$\mathrm{rk}(A+B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B).$$

Задача 53. В десяти копилках лежат 1, 2, 3,..., 10 монет. Разрешается добавлять по монете во все копилки, кроме одной. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз, получить во всех копилках одинаковое количество монет?

Задача 54. (а) На ребрах тетраэдра написаны числа $b_1, \ldots, b_6$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом из рёбер оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_6$, для которых задача имеет решения.

(б) На вершинах куба написаны числа $b_1, \ldots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 6 чисел на грани так, чтобы число на каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_8$, для которых задача имеет решения.

Задача 55. Клетки прямоугольной таблицы заполнены числами так, что каждое число является средним арифметическим чисел в четырёх соседних клетках (соседние=имеющие общую сторону). Можно ли восстановить числа во внутренних клетках таблицы по числам в граничных клетках?

Задача 56 ($\star$)**.** На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

Задача 57 ($\star$)**.** (а) В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров в каждом, так что суммарный вес коров первого стада равен суммарному весу коров другого стада. Известно, что каждая корова весит целое число килограммов. Докажите, что все коровы весят одинаково.

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если убрать условие, что вес коровы — целое число?

(в) Найдите ранг $(2n+1) \times (2n+1)$ матрицы, у которой на диагонали стоят нули, а все остальные коэффициенты равны либо 1, либо -1, причём сумма коэффициентов в каждой строке равна нулю.

6. Векторные пространства

Задача 58. Докажите, что любые 3 вектора в $\mathbb{R}^2$ линейно зависимы.

Задача 59. В n-мерном пространстве даны $n+2$ вектора $v_1,\ldots, v_{n+2}$. Докажите, что можно найти такие скаляры $\lambda_1,\ldots, \lambda_{n+2}$ не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+2} v_{n+2} = 0, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+2} = 0.$$

Задача 60. Какие из следующих подмножеств являются вещественными подпространствами в $\mathbb{R}[x]$?

(а) $\{f \mid f(1) = 2\}$; (б) $\{f \mid f(1) = 0\}$; (в) $\{f \mid f$ делится на $(x^2+1)\}$.

Задача 61. Какие из следующих подмножеств являются комплексными подпространствами в $\mathbb{C}^2$?

(а) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$; (б) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = y\}$.

Задача 62. Являются ли линейно зависимыми над $\mathbb{R}$ векторы

(а) $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$? (б) $(1, 2, 3, 5)$, $(2, 3, 5, 8)$, $(3, 4, 7, 11) \in \mathbb{R}^4$?

Задача 63. Докажите, что для каждой пары подпространств U и V в векторном пространстве выполнено тождество, аналогичное формуле включений-исключений для множеств:

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

Задача 64. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(f_1, \ldots, f_n)$ два базиса в одном и том же векторном пространстве, а C — матрица перехода между ними, а именно:

$$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C.$$

Обозначим через x столбец координат некоторого вектора в первом базисе, а через y — столбец координат этого же вектора во втором базисе. Докажите, что

$$y = C^{-1}x.$$

Задача 65. Постройте базис над $\mathbb{R}$ в пространстве всех кососимметрических $n \times n$-матриц с вещественными коэффициентами. (Матрица $B = (b_{ij})_{1\le i,j,\le n}$ называется *кососимметрической*, если $b_{ij} = -b_{ji}$ для всех i и j.)

Задача 66. Пусть V — векторное пространство $n \times n$ матриц. Докажите, что каждая однородная линейная функция f на V представляется в виде:

$$f(X) = \operatorname{tr}(AX)$$

для некоторой матрицы A. (Через $\operatorname{tr}(B)$ обозначается след матрицы B, то есть сумма элементов на её главной диагонали.)

Задача 67. Можно ли представить $\sqrt[3]{4}$ как линейную комбинацию $a + b\sqrt[3]{2}$, где a и b — рациональные числа?

Задача 68. Представляется ли многочлен $1+x+x^2+x^3$ в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами многочленов

(а) $x + 1$, $(x + 1)^2$, $(x + 1)^3$? (б) $x - 1$, $(x - 1)^2$, $(x - 1)^3$?

Задача 69. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0, 1]$.

(а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?

(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$.

Задача 70. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

(а) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt{2}$, $1/(\sqrt{2}-1)$?

(б) Выразите вектор $(1+\sqrt{2})/(3-2\sqrt{2})$ как линейную комбинацию векторов 1 и $\sqrt{2}$.

(в) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt[3]{2}$, $1/(\sqrt[3]{2}-1)$?

(г) Можно ли выразить вектор $1/(\sqrt[3]{2}-1)$ как линейную комбинацию векторов 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}^2$?

Задача 71. Чему равна размерность поля комплексных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над полем

(а) рациональных чисел; (б) вещественных чисел; (в) комплексных чисел?

Задача 72. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$, если:

(а) x^2-2; (б) x^3-2; (в) x^4+4; (г) x^4+1; (д) x^4-2.

Задача 73. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Найдите число всех подпространств в координатной плоскости $\mathbb{F}_q^2$.

Задача 74 (Формула Тейлора)**.** Для каждого $a \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a))$.

Задача 75 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** Для данного набора попарно различных точек $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

Задача 76 ($\star$)**.** Пусть $U \subset \mathbb{F}_2^4$ — плоскость в 4-хмерном пространстве над полем из двух элементов. Найдите количество таких плоскостей $V \subset \mathbb{F}_2^4$, что $U \cap V = \{0\}$.

7. Линейные операторы

Задача 77. (а) Покажите, что векторы 1 и i образуют базис в поле комплексных чисел, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$.

(б) Выпишите матрицу оператора умножения на комплексное число $a+bi$ в базисе $\{1, i\}$.

Задача 78. Найдите два линейных оператора T и U на $\mathbb{R}^2$, такие что $TU = 0$, но $UT \neq 0$.

Задача 79. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор сдвига $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(x+a).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)

Задача 80. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ минимальное по включению подполе в $\mathbb{C}$, содержащее α. Найдите базис в $\mathbb{Q}(\alpha)$ (рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{Q}$), если:

(а) $\alpha = i$; (б) $\alpha = \sqrt[3]{2}$; (в) $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$; (г) $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$; (д) $\alpha = \pi$

Выпишите матрицу оператора умножения на α в найденном базисе.

Задача 81. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \to V$ формулой:
$$(T_a f)(x) = f(ax + 1).$$
Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)

Задача 82. Пусть A_1 и A_2 — две матрицы одного и того же оператора (в разных базисах) на n-мерном пространстве. Докажите, что существует обратимая $n \times n$-матрица P, такая что
$$A_2 = PA_1P^{-1}.$$

Задача 83. Найдите ядро и образ линейного оператора $T : \mathbb{F}^5 \mapsto \mathbb{F}^4$, заданного матрицей:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 17 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$
(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

Задача 84. Для каждого вектора $a \in \mathbb{R}^3$ найдите ядро и образ оператора:
$$T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad T : u \mapsto [u, a].$$

Задача 85. Найдите ядро и образ оператора дифференцирования на пространстве многочленов степени не выше n. Напомним, что оператор дифференцирования — это оператор, который сопоставляет многочлену $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ его производную $f' := na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.