Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 6. Операторы

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. В координатном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z) найдите матрицу поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x = y = -z\}$.

Задача 2. Проверьте ассоциативность умножения матриц прямым вычислением в следующем случае:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}.$$

(Это пример с самопроверкой — неправильно перемножите, не сойдётся. Если хотите потренироваться в умножении матриц, можете сами придумать себе примеры по этому же принципу.)

Задача 3. Линейное отображение $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ координатной плоскости в себя задано матрицей:

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \text{(б)}\ \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}, \qquad \text{(в)}\ \begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}.$$

Определите, является ли T взаимно-однозначным, сохраняет ли оно углы, и сохраняет ли расстояния.

Задача 4. Найдите формулу для коэффициентов матрицы

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n; \qquad \text{(б)}\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^n.$$

Задача 5. Выпишите матрицу оператора дифференцирования на пространстве многочленов степени не выше 3 в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Задача 6. Пусть $\alpha = \sqrt[3]{2}$ и $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Будем рассматривать $\mathbb{Q}(\alpha)$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Определим оператор

$$T_\beta : \mathbb{Q}(\alpha) \mapsto \mathbb{Q}(\alpha); \quad T_\beta(x) = \beta x.$$

Выпишите матрицу оператора T в базисе $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ для
(а) $\beta = \alpha$; (б) $\beta = 1 + \alpha + \alpha^2$.

Задача 7. Пусть A и B — квадратные $n \times n$ матрицы.
(а) Всегда ли верно, что $AB = BA$?
(б) Когда верно $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?
(в) Раскройте скобки в произведении $(A + B)^3$.

Задача 8. Вычислите A^{2021}, где

$$A = \begin{pmatrix}1 & e & \pi & \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\\ 0 & -1 & \sqrt{2} & e^\pi\\ 0 & 0 & i & \pi^e\\ 0 & 0 & 0 & -i\end{pmatrix}.$$

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Домашнее задание 4. Срок сдачи 7 октября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. В координатном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z) найдите матрицу поворота на угол $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки относительно оси y.

Задача 2. Найдите ранг матрицы над полем комплексных чисел:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ 1-i & 1+i & 2 \\ 1+i & 2i & 1-i \end{pmatrix}$$

Задача 3. Пусть $a = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Найдите ядро и образ оператора:

$$T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad T : u \mapsto [u, a].$$

(Через $[u, v]$ обозначается векторное произведение векторов u и v в $\mathbb{R}^3$.)

Задача 4. Пусть V — пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше два. Определим оператор $T : V \to V$ формулой:

$$(Tf)(x) = f(x + 2).$$

Проверьте, что T является линейным оператором и выпишите его матрицу в базисе $\{1, x, x^2\}$.

Задача 5. Пусть $T : V \to V$ — линейный оператор на векторном пространстве V. Докажите, что $T^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$.