Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 7. Ранг

факультет математики, НИУ ВШЭ

Если не оговорено обратное, то все векторные пространства и уравнения рассматриваются над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Задача 1. Вычислите ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найдите ядро $\operatorname{Ker} T$ и образ $\operatorname{Im} T$ линейного оператора $T : \mathbb{F}^5 \mapsto \mathbb{F}^4$, заданного матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 17 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ — линейное отображение, заданное матрицей A размера $m \times n$. Рассмотрим систему уравнений от n переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

(а) Покажите, что система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $b \in \operatorname{Im} T$.

(б) Покажите, что система имеет не более одного решения для любой правой части тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

(в) При каком условии на a, b, c и d система

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

имеет единственное решение при любой правой части?

(г) Напишите явную формулу для решения из пункта (в).

Задача 4 (Неравенство Сильвестра)**.** Пусть A и B — матрицы размера $m \times n$ и $n \times k$, соответственно. Докажите неравенства на ранги:

$$\text{(а) } \operatorname{rk} AB \leq \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}; \ \text{(б) } \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n \leq \operatorname{rk} AB.$$

Задача 5. Пусть $T : V \to V$ — линейный оператор на векторном пространстве V.

(а) Докажите, что если $T^2 = T$, то $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$, причём оператор T при ограничении на $\operatorname{Im}(T)$ действует как тождественный оператор.

(б) Докажите, что если $\dim V = n$, то

$$V \simeq \operatorname{Ker}(T^n) \oplus \operatorname{Im}(T^n).$$

Задача 6. Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле из q элементов, а $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ — линейное отображение. Докажите, что

$$|\operatorname{Im} T| \cdot |\operatorname{Ker} T| = q^n.$$