

Семинар 8. Алгоритм Евклида для целых чисел

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите НОД (наибольший общий делитель) чисел:

(а) $m = 20, n = 13$; (б) $m = 126, n = 91$; (в) $m = 77695236973, n = 6003722857$.

Задача 2. Для каждой пары чисел m и n из предыдущей задачи найдите все такие целые x и y , что

$$mx + ny = \text{НОД}(m, n).$$

Задача 3. Найдите все решения в целых числах диофантова уравнения

$$16x + 27y = 214.$$

Задача 4. Птицефабрика фасует яйца в коробки, рассчитанные либо на дюжину¹ яиц, либо на 25 яиц. Сможет ли птицефабрика отсчитать покупателю ровно 401 яйцо, используя только такие коробки? Предполагается, что в каждой коробке лежит ровно столько яиц, на сколько она рассчитана.

Задача 5 (Китайская теорема об остатках). Найдите все решения системы сравнений

$$x \equiv 5 \pmod{8}, \quad x \equiv 2 \pmod{7}, \quad x \equiv 3 \pmod{15}.$$

Задача 6. Используя, что

$$718865222040754575648532881408 = x^{13}$$

для некоторого целого x , найдите x без калькулятора.

Задача 7. Найдите натуральное число x , не превосходящее 120, такое что

$$x \equiv 1 \pmod{8}, \quad x \equiv 2 \pmod{5}, \quad x \equiv 0 \pmod{3}.$$

Задача 8. Какой цифрой заканчивается число 2017^{2018} ?

Задача 9. (а) Разложите на простые множители числа 111, 1111, 8051, 11111, 111111.

(б) Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Задача 10. (а) Докажите, что ни одно из чисел $4k + 3$ нельзя представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

(б) Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 11. (а) Докажите, что простых чисел вида $4k + 3$ бесконечно много.

(б) Докажите, что простых чисел вида $4k + 1$ бесконечно много.

Задача 12. (а) Докажите малую теорему Ферма: если p — простое число, то $n^p - n$ делится на p для любого натурального n .

(б) Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

¹Дюжина — это 12, гросс — это 12^2 , а масса — это 12^3 (по-видимому, именно в этом смысле слово масса вошло в идиомы “масса народа” или “масса дел”). Раньше двенадцатеричная система счисления была довольно популярна.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2019 Г.

Домашнее задание 5. Срок сдачи 14 октября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Разложите многочлен

$$x^4 - 3x^2 + 9$$

в произведение неприводимых многочленов с рациональными коэффициентами.

Задача 2. Фальшивомонетчик напечатал по сотне купюр достоинством в 9 и 13 долларов. Сколькими способами он сможет заплатить без сдачи 530 долларов?

Задача 3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе

$$\frac{1}{(2 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})}$$

Задача 4. Найдите такие вещественные числа a , b , c и d , что справедливо тождество

$$\frac{x^3 + 3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 2} + \frac{d}{x - 3}.$$

Задача 5. Найдите все неприводимые многочлены степени четыре с коэффициентами в поле из двух элементов.