Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 9. Многочлены

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Разложите на неприводимые множители в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены

(а) $x^4 + 4x^2 + x + 6$; (б) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Задача 2. Найдите наибольший общий делитель многочленов $x^{30} - 1$ и $x^8 - 1$.

Задача 3. (а) Найдите такие многочлены f и g с рациональными коэффициентами, что

$$f(x)(x^3 - 2) + g(x)(2 + x + x^2) = 1,$$

и при этом степень f и g не больше 2.

(б) Найдите такие рациональные числа a, b и c, что

$$\frac{1}{(2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}.$$

Задача 4. (а) Найдите квадратный многочлен f с рациональными коэффициентами, такой что

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 20, \quad f(3) = 200.$$

(б) Найдите такие вещественные числа a, b, c и d, что справедливо тождество

$$\frac{81x^2 - 225x + 146}{(x-1)(x-2)(x-3)} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x-3}.$$

Задача 5. Примените решето Эратосфена, чтобы найти все неприводимые многочлены степени не выше трёх с коэффициентами в поле из двух элементов.

Задача 6. Является ли многочлен $x^5 + x + 1$ неприводимым над

(а) $\mathbb{F}_2$; (б) $\mathbb{Q}$; (в) $\mathbb{R}$?

Задача 7. (а) Докажите для любого заданного поля $\mathbb{F}$, что существует бесконечно много неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1 и остальными коэффициентами из $\mathbb{F}$.

(б) Классифицируйте все неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. (Подсказка: используйте основную теорему алгебры.)

(в) Приведите пример неприводимого многочлена степени 5 над полем из двух элементов.

(г) Докажите, что над полем из двух элементов существует неприводимый многочлен любой заданной степени.

Задача 8. Найдите коэффициент при x и свободный член многочлена $(x+1)^{65537}$ в кольце многочленов $\mathbb{F}_2[x]$.

Задача 9 ($\star$). Придумайте эффективный алгоритм разложения многочлена над полем из двух элементов на неприводимые множители.

Задача 10 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** Для данного набора попарно различных точек $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ постройте такой базис $f_0, f_1, \ldots, f_n$ в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, чтобы каждый многочлен f в этом базисе представлялся в виде $f = f(a_0)f_0 + f(a_1)f_1 + \ldots + f(a_n)f_n$.