

Семинар 11. Ядро и образ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Если не оговорено обратное, то через  $\mathbb{F}$  обозначается произвольное поле.

**Задача 1.** Для отображения  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  найдите образ  $f(H)$  полуплоскости  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z\}$ , а также прообраз  $f^{-1}(i)$  точки  $i \in \mathbb{C}$ :

(а)  $f(z) = z^{-1}$ ; (б)  $f(z) = |z|$ ; (в)  $f(z) = z^2$ ; (г)  $f(z) = \bar{z}$ .

**Задача 2.** Для отображения  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  найдите его образ  $f(\mathbb{R}^2)$ , а также прообраз  $f^{-1}(a)$  точки  $a \in \mathbb{R}^2$ .

(а)  $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ ,  $a = (0, 0)$ ; (б)  $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ ,  $a = (1, 1)$ ;

(в)  $f(x, y) = (x + y, 2x + y)$ ,  $a = (0, 0)$ ; (г)  $f(x, y) = (x + y, 2x + y)$ ,  $a = (1, 1)$ .

**Задача 3.** Выясните, какие из следующих отображений  $T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  являются линейными операторами и выпишите их матрицы в стандартном базисе:

(а)  $n = 2$ ,  $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ ; (б)  $n = 2$ ,  $T(x_1, x_2) = (x_2 - 1, x_1 + 1)$ ;

(в)  $n = 3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2, x_3, x_2)$ ; (г)  $n = 3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_2)$ .

**Задача 4.** Найдите образы и ядра линейных операторов из предыдущей задачи.

**Задача 5.** Найдите общий вид матрицы линейного оператора  $T$  в базисе, первые  $k$  векторов которого составляют:

(а) базис ядра оператора  $T$ ; (б) базис образа оператора  $T$ .

**Задача 6.** (а) Вычислите размерность образа оператора  $T : \mathbb{F}^4 \rightarrow \mathbb{F}^4$ , который в базисе  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  задан матрицей:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}.$$

(б) Задайте ядро оператора  $T$  из пункта (а) уравнениями, а образ — образующими, используя базис  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ .

**Задача 7.** Найдите ядро и образ оператора в  $\mathbb{R}^6$ , который в некотором базисе записывается “таблицей сложения”, то есть матрицей  $6 \times 6$ , у которой на пересечении  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца стоит  $i + j$ . (В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

**Задача 8.** Найдите ядро и образ оператора в  $\mathbb{R}^6$ , который в некотором базисе записывается “таблицей умножения”, то есть матрицей  $6 \times 6$ , у которой на пересечении  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца стоит  $i \cdot j$ . (В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

**Задача 9.** Пусть  $\mathbb{F}$  — конечное поле из  $q$  элементов, а  $T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  — линейное отображение.

(а) Чему может быть равно количество векторов в ядре оператора  $T$ ?

(б) Известно, что ядро оператора  $T$  состоит из  $q$  векторов. Сколько векторов может быть в образе оператора  $T$ ? Сколько векторов может быть в прообразе  $T^{-1}(v)$  для  $v \in \mathbb{F}^m$ ?