Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 12. Матрицы и операторы

факультет математики, НИУ ВШЭ

Элементы координатного пространства $\mathbb{F}^n$ над полем $\mathbb{F}$ мы будем записывать как векторы-столбцы.

Задача 1. Определим линейный оператор $T : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ по правилу $T(v) = Av$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Через Av обозначается произведение матрицы A и столбца v. Найдите полные прообразы следующих векторов $w \in \mathbb{Q}^2$ при отображении T:

$$\text{(а) } w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(в) } w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(г) } w = \begin{pmatrix} \frac{1}{2019} \\ \frac{1}{2020} \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найдите ядро и образ оператора T из задачи 1.

Задача 3. Существуют ли такая 2×3 матрица A и такая 3×2 матрица B, что

$$\text{(а) } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в) } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Матрица линейного оператора $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ в некотором базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Найдите ядро и образ оператора T для каждого значения параметра $x \in \mathbb{R}$.

Задача 5. Вычислите без перемножения матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2019}.$$

Задача 6. (а) На ребрах тетраэдра написаны числа $b_1, \ldots, b_6$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом из рёбер оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_6$, для которых задача имеет решения.

(б) На вершинах куба написаны числа $b_1, \ldots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 6 чисел на грани так, чтобы число на каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_8$, для которых задача имеет решения.

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Домашнее задание 6. Ядро и образ. Срок сдачи 11 ноября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Если не оговорено обратное, то через $\mathbb{F}$ обозначается произвольное поле. Через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ обозначается вектор-столбец:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Элементы координатного пространства $\mathbb{F}^n$ записываются как векторы-столбцы.

Задача 1. Определим линейное отображение $T : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$ по формуле $T(x_1, x_2, x_3)^t = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1)^t$. Выпишите матрицу отображения T в стандартных базисах в $\mathbb{F}^3$ и $\mathbb{F}^2$.

Задача 2. Найдите ядро и образ линейного отображения T из задачи 1.

Задача 3. Можно ли так выбрать базисы в $\mathbb{F}^3$ и $\mathbb{F}^2$, чтобы матрица оператора T из задачи 1 имела вид:

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

Требуется либо доказать, что таких базисов не существует, либо привести пример базисов, в которых матрица оператора T имеет ровно такой вид.

Задача 4. Найдите ядро и образ оператора в $\mathbb{R}^6$, который в некотором базисе записывается матрицей 6×6, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит 1, если $i + j$ нечётно, и 0 иначе. (В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

Задача 5. Оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в некотором базисе задан матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдите все такие $\lambda \in \mathbb{R}$, что оператор $T - \lambda I$ имеет ненулевое ядро (через λI обозначается оператор, который каждый вектор растягивает в λ раз).