Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 13. Объёмы и определители

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Целые числа 1798, 2139, 3255, 4867 делятся на 31. Без всяких вычислений покажите, что определитель четвёртого порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

также делится на 31.

Задача 2. (а) Два параллелограмма Π_1 и Π_2 на плоскости имеют общее ребро Γ и лежат по одну сторону от прямой, содержащей Γ. Обозначим через Γ_1 и Γ_2, соответственно, их рёбра, параллельные Γ. Докажите, что Π_1 и Π_2 имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда Γ_1 и Γ_2 лежат на одной прямой.

(б) Сформулируйте и докажите n-мерный аналог пункта (а) для произвольного натурального n.

Задача 3. Чему равен определитель квадратной матрицы, у которой сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами?

Задача 4. (а) Вычислите площадь параллелограмма на плоскости, натянутого на векторы $(13, 21)$ и $(21, 34)$.

(б) Вычислите объём параллелепипеда в трёхмерном пространстве, натянутого на векторы $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 9)$.

Задача 5 (Разложение определителя по строке)**.** Пусть A — матрица размера $n \times n$. Обозначим через a_{ij} элемент матрицы A, стоящий на пересечении i-той строки и j-того столбца, а через A_{ij} — матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$, полученную из A вычёркиванием i-той строки и j-того столбца. Докажите формулу:

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + \ldots + (-1)^n a_{1n} \det(A_{1n}).$$

Задача 6. (а) Обозначим через $\mathbb{Z}^2$ решётку векторов с целыми координатами в $\mathbb{R}^2$. Пусть $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейный оператор, такой что его матрица в стандартном базисе имеет целые коэффициенты. Докажите, что отображение $T|_{\mathbb{Z}^2} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ является биекцией тогда и только тогда, когда $\det(T) = \pm 1$.

(б) На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника.

Задача 7. Через F_n обозначим n-ое число Фибоначчи (напомним, что $F_0 = F_1 = 1$, и $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ для всех натуральных n). Докажите тождество:

$$F_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Домашнее задание 7. Срок сдачи 18 ноября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Вычислите объём параллелепипеда в $\mathbb{R}^4$, натянутого на векторы $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$, $(1,4,9,16)$, $(1,8,27,64)$.

Задача 2. Существует ли такой параллелограмм на вещественной плоскости, что его площадь равна единице, длины сторон и диагоналей больше 1000, и все вершины имеют целые координаты?

Задача 3. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Докажите, что определитель кососимметрической $n \times n$ матрицы равен нулю при нечётных n.

Задача 5. Вычислите определитель $n \times n$ матрицы, у которой на диагонали стоят числа $1+\mu_1, \dots, 1+\mu_n$, а вне диагонали — единицы.