Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 14. Определители и объёмы

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите явные формулы для определителя матрицы размера
(а) 2×2; (б) 3×3; (в) 4×4.

Задача 2. (а) Докажите, что ранг $n \times n$ матрицы A равен n тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$.

(б) Для каких простых чисел $p \in \mathbb{N}$ система сравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 0 \pmod p \\ 2x + 3y + z \equiv 0 \pmod p \\ 3x + y + 2z \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

имеет ненулевое решение?

Задача 3. Докажите тождество:

$$\det \begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{pmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

Задача 4 (Грассмановы многочлены)**.** Формальные переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с операцией умножения $\wedge$ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям: $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ (в частности, $\xi_i \wedge \xi_i = 0$).

(а) Докажите, что для любых скаляров $a_1, \ldots, a_n$ выполнено тождество:

$$(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n) \wedge (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n) = 0$$

(б) Покажите прямым вычислением в случае $n = 2, 3, 4$, что для каждой $n \times n$ матрицы A с коэффициентами a_{ij} выполнено тождество:

$$\det(A)\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n = (a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{n1}\xi_n) \wedge \cdots \wedge (a_{1n}\xi_1 + \ldots + a_{nn}\xi_n).$$

Определение 1. *Пусть A — матрица размера $m \times n$. Транспонированная матрица A^t — это матрица размера $n \times m$, полученная из A отражением относительно главной диагонали, то есть $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.*

Матрица называется симметрической, если $A = A^t$, и кососимметрической, если $A = -A^t$.

Задача 5. (а) Докажите, что если A — квадратная матрица, то $\det A = \det A^t$.

(б) Докажите, что параллелограмм, натянутый на векторы (a, b) и (c, d) имеет такую же площадь, как и параллелограмм, натянутый на векторы (a, c) и (b, d).

(в) Докажите, что $(AB)^t = B^t A^t$.

Задача 6 (Определитель Вандермонда)**.** Докажите тождество:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Задача 7. Все вершины параллелепипеда в трёхмерном пространстве имеют целочисленные координаты. При этом на его рёбрах и гранях нет других целочисленных точек, кроме вершин. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что внутри него есть ровно 9 целочисленных точек.