Семинар 15. Аффинные пространства

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Докажите, что прямые $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = k_1x + l_1\}$ и $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = k_2x+l_2\}$ на аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x,y) параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $l_1 \neq l_2$. (Напомним, что прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.)

(б) Пересекаются ли прямые $\{(0,0,1)+t(2,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ и $\{(3,3,3)+t(1,2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$?

(в) Найдите уравнение гиперплоскости в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$, проходящей через точки $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$, $(2,3,4,1)$, $(3,4,1,2)$.

(г) Опишите все случаи взаимного расположения плоскости и прямой в четырёхмерном аффинном пространстве.

Задача 2. Нарисуйте все точки и все прямые в аффинной плоскости над полем из двух элементов.

Определение 1. *Отображение аффинных пространств $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ называется аффинным, если отображение ассоциированных векторных пространств:*

$$T_F : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m; \quad T_F : \overrightarrow{ab} \mapsto \overrightarrow{F(a)F(b)}$$

является линейным.

Задача 3. (а) Докажите, что аффинное отображение из пространства в себя можно представить в виде композиции линейного отображения (сохраняющего начало координат) и параллельного переноса.

(б) Опишите все аффинные отображения из прямой в прямую.

(в) Верно ли, что каждый треугольник на аффинной плоскости можно перевести в любой другой аффинным преобразованием (=обратимым аффинным отображением)?

(г) Используя свойства аффинных преобразований, докажите, что медианы каждого треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 4. (а) Докажите, что линейное отображение из векторного пространства в себя обратимо тогда и только тогда, когда определитель его матрицы (в произвольно выбранных базисах) отличен от нуля.

(б) Сформулируйте и докажите критерий обратимости аффинного отображения.

Задача 5. В настольной игре Сет у каждой карточки есть четыре признака (цвет, форма, количество, заполнение), причём каждый признак принимает три значения. Три карточки образуют сет, если по каждому признаку они либо все одинаковы (например, одного цвета), либо все разные (например, никакие две не совпадают по цвету). Покажите, что можно отождествить карточки с точками в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ над полем $\mathbb{F}^3$ из трёх элементов так, что каждые три карточки, составляющие сет, будут лежать на одной прямой.

Задача 6. В головоломке "Пятнашки" требуется упорядочить по возрастанию 15 одинаковых квадратиков с номерами от 1 до 15, передвигая их по дну квадратной коробки, сторона которой ровно в четыре раза больше стороны квадратика (то есть, в коробке остаётся ровно одно незаполненное поле в виде квадратика). Докажите, что если в начальном расположении все квадратики от 1 до 13 стояли на своём месте, а 14 и 15 были переставлены местами, то головоломку собрать не получится.

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Домашнее задание 8. Срок сдачи 25 ноября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ и $(3,2,2)$ в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Задача 2. Найдите определитель оператора $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$, если известно, что T переставляет базисные векторы $e_1, \dots, e_9$ следующим образом:

$$e_1 \xrightarrow{T} e_3 \xrightarrow{T} e_5 \xrightarrow{T} e_7 \xrightarrow{T} e_1; \quad e_2 \xrightarrow{T} e_8 \xrightarrow{T} e_2; \quad e_4 \xrightarrow{T} e_9 \xrightarrow{T} e_6 \xrightarrow{T} e_4.$$

Задача 3. В трёхмерном аффинном пространстве задано два репера $(O_1; e_1, e_2, e_3)$ и $(O_2; f_1, f_2, f_3)$, причём $O_2 - O_1 = e_1 + e_2 + e_3$, и $f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2$. Найдите координаты точки относительно второго репера, если известно, что её координаты относительно первого репера равны $(1,2,3)$.

Задача 4. Нарисуйте все точки и все прямые в аффинной плоскости над полем из трёх элементов.

Задача 5. Найдите количество прямых в аффинной плоскости над конечным полем из q элементов.