Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 17. Евклидова геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Во всех задачах дело происходит в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$, и через $x_1, \ldots, x_n$ обозначены координаты в некотором ортонормированном базисе.

Задача 1. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, порождённая векторами $(1, 1, -2)$ и $(3, -4, 1)$, и содержащая точку $(1, 1, 1)$.
(а) Задайте плоскость Π уравнением.
(б) Найдите ортогональное дополнение к плоскости Π.
(в) Найдите расстояние от точки $(2, 3, 4)$ до плоскости Π.
(г) Найдите длину ортогональной проекции вектора $(1, 2, 3)$ на плоскость Π.

Задача 2. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 в $\mathbb{R}^3$, где l_1 проходит через точку $(-2, 1, 4)$ и натянута на вектор $(0, 2, -3)$, а l_2 проходит через точку $(0, 1, -4)$ и натянута на вектор $(1, -2, 6)$.

Задача 3. Найдите расстояние от точки $p = (2, 1, -3, 4)$ до плоскости $\Pi = \{2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 + 19 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0\}$ в $\mathbb{R}^4$.

Задача 4. Найдите косинус угла между вектором $(1, 2, 3, 4)$ и подпространством $\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$ в $\mathbb{R}^4$.

Задача 5. Найдите расстояние между плоскостью Π и прямой l в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, если

$$\Pi = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3 = 0\};$$

$$l = (1, -2, 5, 8) + \langle (0, 1, 2, 1) \rangle.$$

Задача 6. Найдите ортогональный базис в подпространстве:
(а) заданном уравнением $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;
(б) порождённом векторами $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$;
(в) в ортогональном дополнении к предыдущему подпространству.

Задача 7. Найдите расстояние между плоскостями $\Pi_1 = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 - 2 = 0,\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - 3 = 0,\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 - 3 = 0\}$; $\Pi_2 = (1, -2, 5, 8, 2) + \langle (0, 1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, -1, 1) \rangle$.

Задача 8 (Метод наименьших квадратов)**.** (а) Плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ натянута на векторы u_1 и u_2. Для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно лежащего в Π) найдите такую линейную комбинацию $v_0 = au_1 + bu_2$, что длина разности векторов $v - v_0$ минимальна.

(б) На плоскости даны n точек $p_1 = (x_1, y_1), \ldots, p_n = (x_n, y_n)$, где $x_1 < \ldots < x_n$. Найдите такую прямую $l = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$, что сумма квадратов $(ax_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$ минимальна (иными словами, прямая l наименее уклоняется от точек $p_1, \ldots, p_n$).

Задача 9. ($\star$) Найдите максимальную площадь равностороннего треугольника, который можно разместить (нестрого) внутри единичного куба.

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Домашнее задание 9. Срок сдачи 2 декабря.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 в $\mathbb{R}^3$, где l_1 проходит через точку $(-2, 1, -1)$ и натянута на вектор $(2, 3, -1)$, а l_2 проходит через точку $(1, -1, 2)$ и натянута на вектор $(-1, 2, 4)$.

Задача 2. Найдите косинус угла между прямой l и плоскостью Π в $\mathbb{R}^3$, если

$$l = \{(3t, -2t, 6t) \mid t \in \mathbb{R}\}; \quad \Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z - 1 = 0\}.$$

Задача 3. Подпространство $U \subset \mathbb{R}^4$ задано следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

Напишите систему уравнений, задающую ортогональное дополнение к U.

Задача 4. Найдите 4 точки на рёбрах единичного куба в $\mathbb{R}^3$, образующие квадрат со стороной строго больше единицы.

Задача 5. Путём экспериментов Буратино обнаружил зависимость между количеством посаженных монет n и урожаем $f(n)$. А именно, $f(1) = 4$, $f(2) = 11$, $f(3) = 13$, $f(4) = 18$. Найдите такую линейную функцию $l(x) = ax + b$, что сумма квадратов

$$\sum_{i=1}^{4} (f(i) - l(i))^2$$

минимальна.