Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 18. Векторное произведение

факультет математики, НИУ ВШЭ

Определение 1. *Векторным произведением* $[u,v]$ *неколлинеарных векторов* u *и* v *в* $\mathbb{R}^3$ *называется такой вектор* $[u,v] \in \mathbb{R}^3$, *что*

(1) $[u,v]$ *ортогонален векторам* u *и* v;
(2) *длина вектора* $[u,v]$ *равна площади параллелограмма, натянутого на* u *и* v;
(3) *базис* u, v, $[u,v]$ *задаёт положительную ориентацию в* $\mathbb{R}^3$.

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нулю.

Задача 1. (а) Пусть (e_1, e_2, e_3) — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. Вычислите векторные произведения $[e_1,e_2]$, $[e_2,e_1]$, $[e_1,e_3]$, $[e_3,e_1]$, $[e_2,e_3]$, $[e_3,e_2]$, $[e_1+e_2,e_3]$ и $[e_1+e_2+e_3,e_3]$, пользуясь только определением.

(б) Проверьте, что векторное произведение антикоммутативно (то есть $[u,v] = -[v,u]$), ассоциативно относительно умножения на скаляр (то есть $\lambda[u,v] = [\lambda u, v]$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$) и дистрибутивно (то есть $[u+w,v] = [u,v]+[w,v]$).

(в) Пусть $u = (x_1,x_2,x_3)$, $v = (y_1,y_2,y_3)$ (координаты взяты в стандартном базисе). Докажите, что

$$[u,v] = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)e_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)e_3$$

Задача 2. (а) Задайте уравнением плоскость, порождённую векторами $(-1,1,-2)$ и $(-3,-4,1)$.

(б) Пусть $u, v \in \mathbb{R}^3$ — два неколлинеарных вектора. Покажите, что плоскость, натянутая на u и v и проходящая через начало координат, задаётся уравнением:

$$([u,v],z) = 0.$$

Задача 3. (а) Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $(3,4,6)$, $(1,2,3)$ и $(1,1,1)$.

(б) Пусть $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ — три вектора. Докажите, что объём параллелепипеда, натянутого на u, v и w равен $|([u,v],w)|$.

Задача 4. (а) Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, порождённая векторами $(-1,1,-2)$ и $(-4,-3,-1)$. Найдите длину ортогональной проекции вектора $(1,3,1)$ на плоскость Π.

(б) Пусть $u,v \in \mathbb{R}^3$ — два неколлинеарных вектора, лежащих в векторной плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Докажите, что ортогональная проекция вектора $w \in \mathbb{R}^3$ на плоскость Π равна

$$w - \frac{([u,v],w)}{|[u,v]|^2}[u,v].$$

Задача 5. Докажите, что поворот R в $\mathbb{R}^3$ на угол φ (против часовой стрелки) относительно оси, направленной вдоль единичного вектора e, задаётся формулой:

$$R(v) = (1-\cos\varphi)(v,e)e + \cos\varphi\ v + \sin\varphi\ [e,v].$$

Задача 6. Докажите, что для любых трёх векторов $a,b,c \in \mathbb{R}^3$ выполнено:

(а) тождество BAC–CAB

$$[a,[b,c]] = b\cdot(a,c) - c\cdot(a,b);$$

(б) тождество Якоби

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0.$$