

Семинар 19. Билинейные формы

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Какие из следующих функций от двух вещественных переменных задают симметричные билинейные формы на одномерном векторном пространстве \mathbb{R} ?

- (а) $b(x, y) = x + y$; (б) $b(x, y) = x^2 + y^2$; (в) $b(x, y) = |x||y|$; (г) $b(x, y) = xy$;
 (д) $b(x, y) = xy - 1$; (е) $b(x, y) = 2xy$; (ж) $b(x, y) = xy^2 + x^2y$.

Задача 2. На векторном пространстве V задана симметричная билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$. Для некоторых векторов $u, v \in V$ известно, что $b(u, u) = 1$, $b(v, v) = 2$, $b(u + v, u + v) = 3$.

- (а) Могут ли векторы u и v быть линейно зависимы?
 (б) Можно ли однозначно определить значение $b(u, v)$?
 (в) Найдите $b(u - v, u - v)$.

Задача 3. Пусть задана симметричная билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$ на векторном пространстве V над полем \mathbb{F} . Определим ассоциированную квадратичную форму $q : V \rightarrow \mathbb{F}$ по правилу $q(v) = b(v, v)$.

- (а) Для каждой пары векторов $u, v \in V$ докажите тождество параллелограмма:

$$q(u + v) + q(u - v) = 2q(u) + 2q(v).$$

(б) Можно ли однозначно восстановить билинейную форму $b(\cdot, \cdot)$ по её ассоциированной квадратичной форме q ?

Задача 4. Пусть $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма, заданная формулой $q(v) := ax^2 + bxy + cy^2$, где (x, y) — координаты вектора v в стандартном базисе. При каких условиях на коэффициенты a, b, c

- (а) форма обращается в нуль на ненулевом векторе, то есть существует такой ненулевой $v \in V$, что $q(v) = 0$;
 (б) форма положительно определена, то есть $q(v) > 0$ для всех $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
 (в) форма отрицательно определена, то есть $q(v) < 0$ для всех $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

Задача 5. (а) Для каждого пункта предыдущей задачи выберите какую-нибудь квадратичную форму q , удовлетворяющую условиям этого пункта и нарисуйте множество всех таких точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ на евклидовой плоскости, что $q(x, y) = 1$.

(б) К какому максимально простому виду можно привести квадратичную форму q линейной заменой координат?

Задача 6. Рассмотрим стандартное скалярное произведение на \mathbb{R}^n и ограничим его на гиперплоскость $U = \{x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Через e_1, \dots, e_n обозначим стандартный базис в \mathbb{R}^n .

- (а) Найдите матрицу Грама скалярного произведения на U в базисе $\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$.

- (б) Найдите ортонормальный базис в U .

Задача 7. Матрица Грама билинейной формы $b(\cdot, \cdot)$ в стандартном базисе в \mathbb{R}^3 имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Является ли форма b симметричной? Положительно определённой?

Домашнее задание 10. Срок сдачи 9 декабря.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. На векторном пространстве V задана симметричная билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$. Для некоторых векторов $u, v \in V$ известно, что $b(u, u) = 1$, $b(v, v) = 2$, $b(u + v, u + v) = 3$. Найдите $b(u, u + v)$.

Задача 2. На плоскости \mathbb{R}^2 задана симметричная билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$. Известно, что $b(v, v) = x^2 + xy + y^2$, где (x, y) — координаты вектора $v \in \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе. Выпишите матрицу Грама формы $b(\cdot, \cdot)$ в том же базисе.

Задача 3. Пусть u и v — два вектора в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Известно, что матрица Грама стандартного скалярного произведения для набора векторов (u, v) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите площадь параллелограмма, натянутого на векторы u и v .

Задача 4. Определите, является ли следующая квадратичная форма в \mathbb{R}^3 положительно определённой:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j.$$

Задача 5. Пусть V пространство вещественных 2×2 матриц. Определим на V форму

$$(A, B) = \frac{1}{2} (\det(A + B) - \det(A) - \det(B))$$

(такая форма называется *смешанным определителем*).

- (а) Докажите, что форма (\cdot, \cdot) билинейна и симметрична.
- (б) Выпишите матрицу формы (\cdot, \cdot) в стандартном базисе.