Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 20. Квадратичные формы

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Билинейная форма $b(u,v)$ в $\mathbb{R}^3$ задана на парах базисных векторов в стандартном базисе: $b(e_1,e_1)=3$, $b(e_1,e_2)=2$, $b(e_1,e_3)=4$, $b(e_2,e_1)=1$, $b(e_2,e_2)=5$, $b(e_2,e_3)=2$, $b(e_3,e_1)=-1$, $b(e_3,e_2)=-2$, $b(e_3,e_3)=6$. Найдите матрицу Грама этой билинейной формы в стандартном базисе. Обладает ли она какими-то дополнительными свойствами?

(б) Вычислите $b(e_1+2e_2+3e_3, e_1+2e_2+3e_3)$.

Задача 2. Найдите все экстремумы (=максимумы и минимумы) квадратичной функции от двух вещественных переменных:

(а) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-4y+1$;
(б) $f(x,y)=4x^2+6xy+y^2-4x+2y+3$;
(в) $f(x,y)=-10x^2+6xy-y^2+4x+y+2$.

Задача 3. Найдите матрицы Грама билинейных форм в $\mathbb{R}^3$ в стандартном базис. Через (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3) обозначаются координаты векторов u и v, соответственно.

(а) $b(u,v)=x_1y_1+2x_1y_2+3x_1y_3+4x_2y_1+5x_2y_2+6x_2y_3+7x_3y_1+8x_3y_2+10x_3y_3$;
(б) $b(u,v)=x_1y_2+3x_2y_3+4x_3y_3+x_2y_1+3x_3y_2$;
(в) $b(u,v)=x_1y_2-x_2y_1+2(x_1y_3-x_3y_1)$;
(г) $b(u,v)=x_1y_2-x_2y_1+2(x_1y_3-x_3y_1)+2x_1y_1-2x_2y_2+5x_3y_3$.
(д) Найдите ранги матриц из пунктов (а)–(г).

Задача 4. Для следующих симметричных билинейных форм найдите соответствующие им квадратичные формы:

(а) $b(u,v)=x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2$;
(б) $b(u,v)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2$.

Задача 5. Проверьте, является ли функция $q(v)$ квадратичной формой. Для каждой квадратичной формы $q(v)$ найдите её поляризацию $b(u,v)$:

(а) $q(v)=2x_1^2+x_2$;
(б) $q(v)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-6x_1x_3+4x_2x_3-x_3^2$;
(в) $q(v)=3x_1^2x_2^2$;
(г) $q(v)=(x_1+x_2+x_3)^2$;
(д) $q(v)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

Задача 6. Докажите, что у положительно определенной симметричной билинейной формы над $\mathbb{R}$ диагональные значения матрицы Грама положительны. Верно ли обратное?

Задача 7. Можно ли линейной заменой координат перевести квадратичную форму $q(v)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$ на $\mathbb{R}^3$ в форму:

(а) $y_1y_2+y_3^2$; (б) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$?

Задача 8. Пусть A — матрица линейного оператора из $\mathbb{R}^3$ в себя в стандартном базисе. Известно, что $AA^t=I$ (через I обозначается единичная матрица), и $\det(A)=1$.

(а) Покажите, что оператор сохраняет расстояния в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (относительно стандартного скалярного произведения).

(б) Покажите, что оператор является поворотом.