Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 21. Преобразования

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите канонический вид следующих квадратичных форм на $\mathbb{R}^2$:
(а) $x^2 + xy + y^2$; (б) xy; (в) $x^2 - 2xy + y^2$.

Определение 1. *Коникой на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ называется кривая, заданная уравнением степени 2:*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Задача 2. (а) Покажите, что аффинной заменой координат каждая непустая коника на вещественной аффинной плоскости приводится к одной из следующих канонических форм:
(1) эллипс $x^2 + y^2 = 1$; (2) гипербола $x^2 - y^2 = 1$; (3) парабола $x^2 - y = 0$;
(4) пара прямых $xy = 0$; (5) двойная прямая $x^2 = 0$; (6) точка $x^2 + y^2 = 0$.

(б) Проведите аффинную классификацию коник на комплексной аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$.

Задача 3. Существует ли линейная замена координат, переводящая квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ на $\mathbb{R}^3$ в квадратичную форму:
(а) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$; (б) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$?

Задача 4. Обозначим через A матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(а) Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе (e_1, e_2) задан матрицей A. Найдите матрицу оператора T в базисе (f_1, f_2), где $f_1 = e_1 + 2e_2$, $f_2 = e_1 + e_2$.

(б) Матрица Грама билинейной формы b в стандартном базисе равна A. Найдите матрицу Грама формы b в базисе (f_1, f_2).

Задача 5. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(f_1, \ldots, f_n)$ — два базиса в одном и том же векторном пространстве, а C — матрица перехода между ними, а именно:

$$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C.$$

(а) Обозначим через x столбец координат некоторого вектора в первом базисе, а через y — столбец координат этого же вектора во втором базисе. Докажите, что $y = C^{-1}x$.

(б) Обозначим через A матрицу некоторого линейного оператора (из пространства в себя) в первом базисе, а через B — матрицу этого же оператора во втором базисе. Докажите, что $B = C^{-1}AC$.

(в) Обозначим через A матрицу Грама некоторой билинейной формы в первом базисе, а через B — матрицу этой же формы во втором базисе. Докажите, что $B = C^tAC$.

Задача 6. (а) Найдите все изометрии векторной плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно стандартного скалярного произведения. Покажите, что каждая изометрия является либо поворотом, либо отражением.

(б) Найдите все изометрии аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно стандартного скалярного произведения.