Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 22. Линейные уравнения

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите

(а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$; (б) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$; (в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$; (г) $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}^{-1}$.

Задача 2. Решите систему линейных уравнений

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Для системы линейных уравнений найдите явную формулу, выражающую переменные x_i как функции от коэффициентов в правой части (то есть от $b_1, b_2, \ldots$):

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. При каких условиях на b_1, b_2, b_3 система линейных уравнений имеет решение:

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}?$$

Задача 5. Пусть A — матрица размера $n \times n$ с коэффициентами в коммутативном кольце (например, в поле). Обозначим через a_{ij} элемент матрицы A, стоящий на пересечении i-той строки и j-того столбца, а через A_{ij} — матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$, полученную из A вычёркиванием i-той строки и j-того столбца. *Матрица алгебраических дополнений* $\hat{A}$ — это матрица размера $n \times n$, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$. Докажите тождество:

$$A\hat{A}^t = (\det A)I$$

(а) при $n = 2$; (б) при $n = 3$; (в) при произвольном n.

Задача 6. Пусть A — матрица размера $n \times n$ с целочисленными коэффициентами. При каких условиях на A обратная матрица A^{-1} тоже будет целочисленной?

Задача 7. (а) На ребрах тетраэдра написаны числа $b_1, \ldots, b_6$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом из рёбер оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_6$, для которых задача имеет решения.

(б) На вершинах куба написаны числа $b_1, \ldots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 6 чисел на грани так, чтобы число на каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_8$, для которых задача имеет решения.