

Семинар 23. Построения циркулем и линейкой

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. На евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 даны точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Постройте циркулем и линейкой

- (а) равносторонний треугольник; (б) квадрат;
(в) правильный пятиугольник; (г) правильный 15-угольник,
вписанные в единичную окружность с центром в начале координат.

Задача 2. отождествим точки евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 с комплексными числами. Даны точки $0, 1 \in \mathbb{C}$. Докажите, что если комплексные числа z и $w \neq 0$ можно построить циркулем и линейкой, то можно построить и числа

- (а) $z \pm w$; (б) zw ; (в) $\frac{z}{w}$; (г) \sqrt{z} .

Задача 3. (а) Даны две окружности с центрами в точках z_1 и z_2 радиусов R_1 и R_2 , соответственно. Найдите точки пересечения этих окружностей.

(б) Пусть w — точка пересечения окружностей из предыдущего пункта, а $K \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее z_1, z_2, R_1 и R_2 . Чему может быть равна размерность поля $K(w)$ как векторного пространства над K ?

Задача 4. (а) Поделите угол в 19° на 19 равных углов циркулем и линейкой.

(б) Докажите, что угол $\frac{2\pi}{3}$ нельзя поделить циркулем и линейкой на три равных угла.

- (в) Поделите угол в 27° на три равных угла циркулем и линейкой.

Задача 5. Даны точки 0 и 1. Найдите все такие $n \leq 16$, что правильный n -угольник можно построить циркулем и линейкой.

Задача 6. Даны точки 0 и 1. Можно ли построить с помощью циркуля и линейки корни многочлена

- (а) $x^2 - 5x + 7$; (б) $x^3 - 3$; (в) $x^4 + 4$; (г)* $x^4 + x - 5$?

Задача 7. Назовём *парабольной плоскостью* плоскость, на которой нарисована парабола. Докажите, что на парабольной плоскости можно построить с помощью циркуля и линейки:

- (а) ось симметрии параболы;

Указание: Сначала докажите, что если окружность пересекает параболу в четырёх точках, то центр тяжести этих точек лежит на оси параболы.

- (б) правильный семиугольник;

- (в) правильный девятиугольник.

(г) Докажите, что любой угол на парабольной плоскости можно поделить на три равные части.

(д) Докажите, что на парабольной плоскости можно построить корень любого кубического многочлена, если его коэффициенты уже построены.