Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Семинар 24. Решение уравнений в радикалах

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Найдите сумму квадратов комплексных корней многочлена x^2+3x+5, не находя сами корни.

(б) Найдите сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена x^4-x^2-x-1.

(в) Сумма двух корней многочлена $2x^3-x^2-7x+\lambda$ равна 1. Найдите λ.

Задача 2. Найдите степень расширения, полученного присоединением к полю $\mathbb{Q}$ всех корней многочлена

(а) x^3-2;   (б) x^4-2;   (в) x^p-a, где p простое число, и $a\in\mathbb{Q}$ не является p-той степенью рационального числа.

Задача 3. Может ли поле из 8-ми элементов содержать в качестве подполя поле из 4-х элементов?

Задача 4. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — корни многочлена

$$f=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0.$$

Определим дискриминант $D(f)$ многочлена как

$$a_n^{2n-2}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2.$$

(а) Докажите, что $D(f)$ является симметрическим многочленом, если его рассматривать как многочлен от переменных $x_1,\ldots,x_n$ (то есть $D(f)$ не меняется при перестановках переменных).

(б) Выразите через a, b и c дискриминант квадратного многочлена ax^2+bx+c. Совпадает ли ответ со школьным определением дискриминанта?

(в) Выразите через p и q дискриминант кубического многочлена x^3+px+q.

(г) Та же задача для многочлена пятой степени x^5+px+q.

Задача 5. (а) Найдите степень расширения, полученного присоединением к полю $\mathbb{Q}$ всех корней многочлена

$$x^3+3x+1.$$

(б) Найдите степень расширения, полученного присоединением к полю $\mathbb{Q}$ всех корней многочлена

$$x^3+px+q,$$

где $p,q\in\mathbb{Q}$.

(в) Для каких простых чисел p многочлен x^3+x^2-2x-1 имеет кратный корень в поле $\mathbb{F}_p$ из p элементов?

Задача 6. Пусть x^3+px+q — неприводимый многочлен с рациональными коэффициентами, а x_1, x_2, x_3 — его комплексные корни. Обозначим через ω первообразный кубический корень из единицы.

(а) Покажите, что $(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)^3$ содержится в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, где D — дискриминант многочлена f. (Выражение $x_1+\omega x_2+\omega^2x_3$ называется *резольвентой Лагранжа.*)

(б) Найдите корни многочлена f в радикалах.