Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Листок 3 (бонусный).

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для получения максимальной итоговой оценки (10) по курсу необязательно сдавать задачи из этого листка. Задачи листка дают дополнительный вклад в итоговую оценку, а также учитываются при сдаче досрочного экзамена.

Задача 1. В настольной игре Сет у каждой карточки есть четыре признака (цвет, форма, количество, заполнение), причём каждый признак принимает три значения. Три карточки образуют сет, если по каждому признаку они либо все одинаковы (например, одного цвета), либо все разные (например, никакие две не совпадают по цвету). Покажите, что можно отождествить карточки с точками в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ над полем $\mathbb{F}^3$ из трёх элементов так, что каждые три карточки, составляющие сет, будут лежать на одной прямой.

Задача 2. Пусть A — матрица линейного оператора из $\mathbb{R}^3$ в себя в стандартном базисе. Известно, что $AA^t = I$ (через I обозначается единичная матрица), и $\det(A) = 1$. Покажите, что оператор является поворотом.

Задача 3. Докажите, что квадратичную форму на конечномерном векторном пространстве над полем из трёх элементов можно привести линейной заменой координат к виду:

$$x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2 \pm x_k^2.$$

Задача 4. Докажите, что композиция двух поворотов R_1 и R_2 в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ также является поворотом. Как найти его ось и угол, если известны оси и углы поворотов R_1 и R_2?

Задача 5. Внутри единичного куба в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ находится равносторонний треугольник (точки треугольника могут лежать на границе куба, а не только во внутренности). Чему равна максимальная возможная площадь треугольника?

Задача 6. Докажите, что определитель каждой целочисленной кососимметрической матрицы является полным квадратом.

Задача 7. Докажите, что $\sqrt{p}$ можно выразить через i и (комплексные) корни степени p из единицы, используя только арифметические операции.

Задача 8. Какие простые числа $p \in \mathbb{N}$ представляются в виде
(а) $x^2 + y^2$; (б) $x^2 + 5y^2$
для целых x и y?

Задача 9. Пусть $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ — попарно различные простые числа. Докажите, что $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Задача 10. Пусть A, B, C и D — симметрические 3×3 матрицы с комплексными коэффициентами. Докажите, что найдутся такие комплексные числа α, β, γ и δ, не равные одновременно нулю, что матрица $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ имеет ранг не больше единицы.