

**Семинар 1. Ещё линейные уравнения**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Известно, что система  $Ax = 0$  из 13-ти однородных линейных уравнений на 31 неизвестное имеет 19-мерное пространство решений. Для каждого вектора-столбца  $b = (b_1, \dots, b_{13})^t$  определим неоднородную систему  $Ax = b$ .

(а) Найдётся ли такой вектор  $b$ , для которого система  $Ax = b$  имеет единственное решение?

(б) Найдётся ли такой вектор  $b$ , для которого система  $Ax = b$  не имеет решений?

**Задача 2.** (а) В последовательности чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  каждый член, кроме первого и последнего, является средним арифметическим двух соседних членов. Можно ли восстановить числа  $a_2, \dots, a_{n-1}$  по числам  $a_1$  и  $a_n$ ?

(б) Клетки прямоугольной таблицы заполнены числами так, что каждое число является средним арифметическим чисел в четырёх соседних клетках (соседние = имеющие общую сторону). Можно ли восстановить числа во внутренних клетках таблицы по числам в граничных клетках?

**Задача 3.** В вершинах  $n$ -угольника написаны числа  $b_1, \dots, b_n$ . При каких условиях на эти числа можно написать ещё  $n$  чисел на рёбра так, чтобы число в каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на двух сходящихся в этой вершине рёбрах? Опишите все решения этой задачи для всех  $b_1, \dots, b_n$ , для которых задача имеет решения при

(а)  $n = 3$ ; (б)  $n = 4$ .

**Задача 4.** (а) На ребрах тетраэдра написаны числа  $b_1, \dots, b_6$ . При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом из рёбер оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях? Опишите все решения этой задачи для всех  $b_1, \dots, b_6$ , для которых задача имеет решения.

(б) На вершинах куба написаны числа  $b_1, \dots, b_8$ . При каких условиях на эти числа можно написать ещё 6 чисел на грани так, чтобы число на каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Опишите все решения этой задачи для всех  $b_1, \dots, b_8$ , для которых задача имеет решения.

**Задача 5.** Имеются кувшин с литром кофе и кувшин с литром молоком, а также чашка объёмом  $k$  миллилитров. Сначала из кувшина с кофе переливают одну чашку в кувшин с молоком и перемешивают, а затем из кувшина с молоком переливают одну чашку в кувшин с кофе. Сколько примерно кофе окажется в кувшине с молоком, если повторить эту процедуру тысячу раз?

**Задача 6.** (а) На завтрак Белоснежка налила семи гномам молока. Первый гном распределил молоко из своей кружки поровну между остальными гномами (себе ничего не оставил). Затем то же самое проделал второй гном, третий, и так далее, до седьмого гнома включительно. В конце у каждого гнома оказалось ровно столько молока, сколько ему вначале налила Белоснежка. Можно ли определить однозначно, сколько молока у каждого гнома, если всего молока 42 унции?

(б) Белоснежка налила каждому гномам 6 унций молока. Гномы повторили процедуру из пункта (а) тысячу раз. Сколько примерно молока будет в чашке у каждого гнома?