Алгебра и геометрия, весенний семестр 2020 г.

Семинар 2. Собственные векторы

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Рассмотрим оператор T на $\mathbb{R}^2$, заданный в стандартном базисе матрицей A, где

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{(в) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нарисуйте векторы $T^n(v)$ для $n = 1,\dots, 5$ и $v = (1, 0)$, $(1, -1)$.

Задача 2. Докажите, что две $n \times n$ матрицы A и B являются матрицами (в каких-то базисах) одного и того же оператора $T : V \to V$ на n-мерном пространстве V тогда и только тогда, когда A и B *подобны*, то есть существует такая обратимая матрица P, что $A = PBP^{-1}$.

Задача 3. (а) Найдите все собственные числа и собственные векторы операторов T из задачи 1.

(б) Определите, какие из операторов в пункте (а) диагонализуемы. Для диагонализуемых операторов найдите базис, в котором их матрица диагональна.

Задача 4. Найдите явную формулу для коэффициентов матрицы A^n для всех матриц A из задачи 1.

Задача 5. Вычислите A^{2021}, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e & \pi & \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & e^{\pi} \\ 0 & 0 & i & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Задача 6. (а) Найдите явную формулу, выражающую через n коэффициенты матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

(б) Найдите явную формулу, выражающую n-ое число Фибоначчи f_n через n. Напомним, что $f_0 = f_1 = 1$, а остальные числа Фибоначчи определяются рекуррентной формулой:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ при } n \geq 2.$$

Задача 7. Может ли вещественная 3×3 матрица A удовлетворять уравнению:

$$\text{(а) } A^{2020} = 0; \quad \text{(б) } (A^2 + I)^{2020} = 0?$$

(Через I обозначается единичная 3×3 матрица.)

Задача 8 ($*$). Рациональный кузнечик прыгает по рациональным точкам прямой. Перед очередным прыжком кузнечик выбирает натуральное число n. Далее, если находится он в точке $\frac{p}{q}$, то прыгает в точку $\frac{p+nq}{q+np}$. Изначально кузнечик находится в точке 2020. Может ли он попасть в точку 3?

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2020 г.

Домашнее задание 1. Срок сдачи 20 января.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите собственные векторы и собственные значения оператора на $\mathbb{R}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Некоторый оператор T на векторном пространстве удовлетворяет уравнению
$$T^2 - 5T + 6I = 0.$$
где I — тождественный оператор. Чему могут быть равны собственные значения оператора T?

Задача 3. Вычислите коэффициенты матрицы
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{10}$$
с точностью до второго знака после запятой включительно.

Задача 4. Существует ли вещественная 3×3 матрица A, удовлетворяющая уравнению
$$A^2 + A + 7I = 0?$$
Через I обозначена единичная 3×3 матрица.

Задача 5. Докажите, что линейный оператор на n-мерном векторном пространстве не может иметь больше, чем n попарно различных собственных значений.