Алгебра и геометрия, весенний семестр 2020 г.

Семинар 3. Многочлены от матриц

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Известно, что многочлен $f \in \mathbb{F}[t]$ аннулирует $n \times n$ матрицу A с коэффицентами в поле $\mathbb{F}$, то есть $f(A)$ — нулевая матрица. Для каждой $n \times n$ обратимой матрицы P докажите, что матрица $f(PAP^{-1})$ тоже нулевая.

Задача 2. Для 2×2 матрицы A найдите многочлен $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ степени не выше 2 такой, что $f(A) = 0$:

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в) } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(г) } A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{(д) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(е) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. (а) Докажите, что каждая 2×2 матрица A с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$, удовлетворяет квадратному уравнению: $A^2 + pA + qI = 0$ для некоторых $p, q \in \mathbb{F}$. (Через I обозначается единичная 2×2 матрица.) Выразите p и q через коэффициенты матрицы.

(б) Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического многочлена $n \times n$ матрицы A. Докажите, что если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно различны, то выполнено тождество $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$. Указание: покажите, что $A = PBP^{-1}$, где B — диагональная матрица.

(в) Докажите, что для каждой $n \times n$ матрицы найдётся такой ненулевой многочлен $f \in \mathbb{F}[t]$, что $f(A) = 0$. Указание: покажите, что матрицы I, A, $A^2, \dots, A^{n^2}$ линейно зависимы над $\mathbb{F}$.

Задача 4. Может ли вещественная 3×3 матрица A удовлетворять тождеству:
(а) $A^2 = 0$; (б) $A^2 - I = 0$; (в) $A^2 + I = 0$?

Указание к (в): покажите, что у A есть вещественное собственное значение.

Задача 5. Покажите, что если многочлен f аннулирует квадратную матрицу A, то $f(\lambda) = 0$ для каждого собственного значения матрицы A.

Указание: умножьте $f(A)$ на собственный вектор со значением λ.

Задача 6. (а) Покажите, что

$$F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}, \text{ где } F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а f_n — это n-ое число Фибоначчи. Напомним, что $f_0 = f_1 = 1$, а остальные числа Фибоначчи определяются рекуррентной формулой:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ при } n \geq 2.$$

(б) Найдите явную формулу, выражающую через n коэффициенты матрицы F^n.
(в) Найдите явную формулу, выражающую n-ое число Фибоначчи через n.