Алгебра и геометрия, весенний семестр 2020 г.

Семинар 4. Минимальный многочлен

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Докажите, что характеристический и минимальный многочлены подобных матриц совпадают.

(б) Найдите характеристический и минимальный многочлены диагональной матрицы размера $n \times n$, у которой на диагонали стоят попарно различные числа λ_1, λ_2, $\dots$, λ_k, причём λ_i встречается ровно m_i раз.

(в) Может ли минимальный многочлен диагонализуемой матрицы иметь кратные корни?

(г) Докажите, что минимальный и характеристический многочлены имеют одни и те же корни (без учёта кратностей).

Задача 2. (а) Известно, что минимальный многочлен матрицы A равен $(t-1)(t-2)$. Покажите, что для каждого многочлена $f \in \mathbb{F}[t]$ найдутся такие числа α и β, что $f(A) = \alpha I + \beta A$.

Указание: $\alpha + \beta t$ — остаток при делении многочлена $f(t)$ на минимальный многочлен матрицы A.

(б) Найдите α и β для многочлена $f(t) = t^n$.

Указание: $\alpha + \beta\lambda = \lambda^n$, если λ — корень минимального многочлена.

(в) Найдите минимальный многочлен матрицы B и явную формулу для B^n:

$$(1)\ B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2)\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad (3)\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & 6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Указание: выразите $B^2 v$ через Bv и v для какого-нибудь базисного вектора v.

Задача 3. (а) Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n; \quad a_0 = 1,\ a_1 = 3.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n.

Указание: $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$, где λ_1 и λ_2 — корни характеристического многочлена.

(б) Обоснуйте указание к пункту (а).

Задача 4. (а) Чему может быть равен минимальный многочлен 2×2 матрицы, если её характеристический многочлен равен $(t-\lambda)^2$?

(б) Верно ли, что если оператор T на конечномерном векторном пространстве имеет два линейно независимых собственных вектора с собственным значением λ, то λ — кратный корень характеристического многочлена оператора T?

(в) Верно ли обратное?

Задача 5. Диагонализуема ли матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}?$$

Задача 6. Приведите пример 3×3 матрицы с минимальным многочленом

(а) t^3; (б) $(t-1)^3$; (в) $t(t-1)$; (г) $t^2(t-1)$.

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2020 г.

Домашнее задание 2. Срок сдачи 27 января.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Выпишите явную формулу для A^n, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n; \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n.

Задача 3. Диагонализуется ли оператор над $\mathbb{R}$, заданный матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}?$$

Задача 4. Найдите минимальный многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Пусть N — нильпотентный оператор на n-мерном векторном пространстве (то есть $N^k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$), и при этом $N^{n-1} \neq 0$. Найдите минимальный многочлен оператора N. Приведите пример такого оператора для $n = 4$.